

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**



Katarína Mordinová

**Zákony arku sinu**

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, PhD,  
Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta,  
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Studijní program: Matematika  
Studijní obor: Finanční matematika

2006

Pod'akovanie: Pod'akovanie patrí hlavne vedúcemu práce RNDr. Danielu Hlubinkovi Ph.D za trpezlivosť, ochotu a profesionalitu, s ktorou mi pomáhal pri tvorbe teto práce.

Prehlašujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce.

V Prahe dňa 10.8.2006

Katarína Mordinová

# Obsah

<b>1. Zákon arku sínu .....</b>	<b>5</b>
1.1 Úvod do problematiky .....	5
1.2 Princíp reflexie .....	7
1.3 Zákon arku sínu.....	12
<b>2. Wienerov proces .....</b>	<b>20</b>
2.1 Náhodné procesy .....	20
2.2 Brownov pohyb .....	21
2.3 Zákon arku sínu pre Wienerov proces .....	23
2.4 Itôovo lema .....	26
<b>3. Oceňovanie finančných derivátov .....</b>	<b>29</b>
3.1 Black-Scholesova rovnica .....	29
3.2 Vyjadrenie ceny akcie .....	33
3.3 Použitie Zákona arku sínu na cenu akcie.....	34
<b>Literatúra .....</b>	

Název práce: Zakony arku sinu

Autor: Katarína Mordinová

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, PhD

e-mail vedoucího: Daniel.Hlubinka@mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto bakalárska práca pojednáva o Zákone arku sínu pre rôzne typy náhodných veličín. Práca je členená do troch častí. Prvá kapitola sa zaoberá najjednoduchšou variantou alternatívne rozdelených nezávislých sčítancov. Zaoberáme sa vyslovením a dôkazom Zákona arku sínu. Druhá kapitola formuje Zákon arku sínu pre Wienerov proces. Tretia kapitola sa venuje využitiu Wienerovho procesu v praxi pri oceňovaní finančných derivátov pomocou Black-Scholesovej formuly.

Klíčová slova: Zákon arku sínu, Náhodná prechádzka, Wienerov proces, Oceňovanie akcií, Black-Scholesova formula

Title: The arc sine laws

Author: Katarína Mordinová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Daniel Hlubinka, PhD

Supervisor's e-mail address: Daniel.Hlubinka@mff.cuni.cz

Abstract: This bachelor thesis treats of the Arc sine law for different types of random variables. The work is divided into three parts. First chapter talks about the simplest alternative distribution function for independent summands. We concerned about vote and proof of the Arc sine law. Second chapter defines Arc sine law for Wiener process. Third chapter addicts about exploitation of Wiener process in practice by valuation of financial derivates with using the Black-Scholes formula.

Keywords: The Arc sine law, Random walk, Wiener process, pricing stocks, Black-Scholes formula

# 1. Zákon arku sínu

## 1.1 Úvod do problematiky

Zahrajme si hru hlava a orol. Táto hra je založená na úspešných a neúspešných hodoch mincou. Máme v nej dvoch hráčov, pričom prvému prislúcha hlava a druhému orol. Ak padne hlava potom prvý hráč dostane bod, ak padne orol potom tento bod dostáva druhý hráč. Ak je minca spravodlivá, predpokladáme, že obaja hráči budú v hre rovnako úspešní a teda očakávaná výhra každého z nich je nulová.

V skutočnosti je to však úplne inak. Jeden z hráčov bude pravdepodobne viesť po väčšinu času hry, dokonca je možné aby jeden z hráčov napríklad viedol po viac ako 75% času hry s pravdepodobnosťou väčšou ako  $2/3$ .

Tieto výsledky vyplývajú z vety, ktorá sa nazýva Zákon arku sínu. Tento zákon bol sformulovaný Paulom Lévym a uvádza presný asymptotický odhad pravdepodobnosti, že jeden z hráčov bude viesť po fixný podiel času hry.

Aby sme sa mohli podrobne venovať skúmaniu tejto problematiky je nutné si na začiatok zvoliť vhodný matematický model, ktorý budeme využívať. Každý výsledok je reprezentovaný premennou  $\omega^i$  a výberový priestor nám v tomto prípade predstavuje množina  $\Omega := \{\omega^1, \dots, \omega^d\}$  všetkých dosiahnuteľných výsledkov. Každému výsledku  $\omega^i$  priradujeme pravdepodobnosť  $p_i$ , s ktorou tento výsledok môže nastať. Pre všetky pravdepodobnosti  $p_i$

platí, že sú reprezentované ako nezáporné reálne čísla a  $\sum_{i=1}^d p_i = 1$ . Prvky neprázdnej množiny

$\Omega$  nazývame elementárne javy, pričom podmnožinu množiny  $\Omega$  môžeme nazvať udalosťou. Pravdepodobnosť výskytu udalosti je daná súčtom pravdepodobností jednotlivých výsledkov, ktoré patria do tejto udalosti. Matematicky si to môžeme vyjadriť takto: ak  $A \in \Omega$  je udalosť, potom  $P(A)$  definujeme ako  $P(A) = \sum_{\omega^i \in A} p_i$ .

Ďalej si matematický model môžeme definovať aj pomocou dvojice  $(\Omega, P)$ , kde  $\Omega$  je konečná množina a  $P$  je funkcia z množiny podmnožín  $\Omega$  do intervalu  $[0,1]$ , v literatúre sa stretávame aj s pomenovaním množinová funkcia. Pre  $P$  však platia nasledujúce podmienky:

i)  $P(\Omega) = 1$

ii) ak  $A, B$  sú disjunktné podmnožiny  $\Omega$ , potom:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Dvojica  $(\Omega, P)$ , pre ktorú platia tieto podmienky sa nazýva konečný pravdepodobnostný priestor a funkcia  $P$  sa nazýva pravdepodobnosť.

Naša hra predstavuje experiment, ktorý pozostáva z opakovania jedného základného pokusu  $n$  - krát. Predpokladáme, že základný pokus má len dva možné výsledky. Prvým je úspech, ktorý značíme jednotkou a druhý je neúspech, ktorý značíme nulou. Aplikujme na hru nami zvolený matematický model ktorý predpokladá, že týchto  $n$  pokusov je identických a vzájomne nezávislých. Označme teda pravdepodobnosť úspechu  $p$  a  $q = 1 - p$  pravdepodobnosť neúspechu.

Výsledok nášho uskutočneného experimentu je reprezentovaný ako postupnosť núl a jednotiek dĺžky  $n$ . Priestor  $\Omega$ , ktorý na základe toho označujeme ako  $\Omega_n$ , predstavuje

usporiadanú množinu  $n$ -tíc núl a jednotiek, teda  $\Omega_n = \{0,1\}^n$ . Prvky  $\Omega_n$  označujeme ako  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , kde každý prvok  $\omega_i; i = 1, \dots, n$  je rovný nule alebo jednotke. Pravdepodobnosť  $\Omega_n$  je vyjadrená pomocou  $P_n$ . Skutočnosť, že všetky základné pokusy v sekvencií sú identické potom vyjadríme tak, že pre každé  $i$  medzi 1 a  $n$  platí:

$$P(\omega_i = 0) = q \quad \text{a} \quad P(\omega_i = 1) = p.$$

Skutočnosť, že výsledok  $(i+1)$ -ho prípadu je nezávislý od výsledku  $i$  predchádzajúcich prípadov je vyjadrená pre všetky  $(e_1, \dots, e_i) \in \{0,1\}^i$  ako:

$$P_{n+1}(\omega_{i+1} = 1 \text{ a } (\omega_1, \dots, \omega_i) = (e_1, \dots, e_i)) = P_{n+1}(\omega_{i+1} = 1) \times P((\omega_1, \dots, \omega_i) = (e_1, \dots, e_i)).$$

Indukciou podľa  $n$  sa pomocou týchto dvoch predchádzajúcich pravidiel dostávame k definícií pravdepodobnosti  $P_n$ . Ak  $S_n(\omega)$  je počet úspechov pre každý výsledok  $\omega$  skúmaného pokusu, potom je pravdepodobnosť  $P_n$  daná ako:

$$P_n(\omega) = p^{S_n(\omega)} q^{n-S_n(\omega)}.$$

Hovoríme, že priestoru  $\Omega_n = \{0,1\}^n$  je priradená pravdepodobnosť  $P_n = \{q, p\}^{\otimes n}$ .

Ak pravdepodobnosť úspechu je rovnaká ako pravdepodobnosť neúspechu, potom priestoru  $\Omega_n$  je priradená jednotná pravdepodobnosť keďže  $p = q$ . To súhlasí s intuitívnou úvahou experimentu, ktorý pozostáva z  $n$  hodov spravodlivou mincou, kde všetky výsledky majú rovnakú pravdepodobnosť.

Teraz, keď máme  $(\Omega, P)$  definovaný ako pravdepodobnostný priestor, môžeme sa zamerať na náhodnú premennú. Náhodnou premennou nazývame funkciu definovanú ako zobrazenie z  $\Omega$  do  $R$ , a značíme ako  $X : \Omega \rightarrow R$ .

Uvažujeme teda počet hodov, ktoré hráči počas hry hodia. Nech je počet týchto hodov  $n$ , teda  $Z_n$  bude predstavovať počet prípadov kedy je hra nerozhodná. Predpokladali by sme, že náhodná premenná  $Z_n$  bude narastať proporcionálne s  $n$ . A to z toho dôvodu, že uvažujeme spravodlivú mincu a pravdepodobnosť padnutia hlavy či orla je rovnaká. Avšak v skutočnosti  $Z_n$  rastie oveľa pomalšie a priebeh možno porovnať skôr k násobku  $\sqrt{n}$ . Aj tento jav má vysvetlenie, a to v Zákone návratu do počiatku.

Pozrime sa na to prostredníctvom nami zvoleného matematického modelu. Vyjadrime si fakt, že minca je spravodlivá. Položme  $p = 1/2$  a nech  $\Omega_n = \{0,1\}^n$  je priestor s pravdepodobnosťou  $P_n$ . Predpokladáme, že :

$$S_n(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n \text{ kde } \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \text{ a } M_n := 2S_n - n, (M_0 = S_0 = 0).$$

Ak  $S_n$  predstavuje podmnožinu množiny  $\Omega_n$ , udáva zároveň počet orlov padnutých v sekvencií  $n$  hodov, potom  $M_n$  je množstvo bodov, o ktoré má prvý hráč navrh od druhého hráča po hodení  $n$  hodov. Pričom platí, že ak prvý hráč vyhráva po  $n$  hodoch, potom  $M_n$  je

kladné a naopak je záporné ak prehráva. Postupnosť hodnôt  $M_n$  počas hry nám vyjadruje jednoduchú náhodnú prechádzku.

Zákon arku sínu nám popisuje správanie náhodnej premennej :

$$T_n := \#\{k : 0 \leq k \leq n; M_k > 0\},$$

čo je počet hodov po ktorých vedie prvý hráč.

Zákon návratu do počiatku nám zase popisuje správanie náhodnej premennej:

$$U_n := \#\{k : 0 < k \leq n; M_k = 0\},$$

tá nám udáva počet prípadov, kedy je stav hry nerozhodný, tj. obaja hráči majú rovnaký počet bodov.

Numericky si môžeme Zákon arku sínu ilustrovať na jednoduchom príklade. Nech prvý hráč vyhráva po dobu  $T$  vzhľadom k celému trvaniu hry, a nech  $p_i$  je pravdepodobnosť, že  $T$  leží

medzi  $\frac{i}{10}$  a  $\frac{i+1}{10}$ . Ak hra trvá dostatočne dlho, potom:

$$p_0 = p_9 \approx 0.20 > p_1 = p_8 \approx 0.090 > p_2 = p_7 \approx 0.074 > p_3 = p_6 \approx 0.067 > p_4 = p_5 \approx 0.064.$$

Priamym dôsledkom Zákona návratu do počiatku je, že :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(U_n > n\varepsilon) = 0 \text{ pre všetky } \varepsilon > 0.$$

Z toho vyplýva, že náhodná premenná :

$$T_n + U_n = \#\{k : 0 < k \leq n; M_k \geq 0\}$$

spĺňa rovnaký Zákon arku sínu ako náhodná premenná  $T_n$ .

## 1.2 Princíp reflexie

Uvedme si najprv jednotlivé dôsledky oboch zákonov, ktoré nám pomôžu pri stavbe dôkazov pre zákony. Pozrime sa na náhodnú prechádzku a jej grafickú reprezentáciu. Uvažujeme priestor  $\Omega_n = \{0,1\}^n$ . Každú súvislú krivku v  $R^2$  pozostávajúcu z konečného počtu  $n$  úsekov môžeme matematicky vyjadriť v tvare:

$$[(t_i, s_i), (t_i + 1, s_i \pm 1)], \quad \text{kde } t_0 = 0, s_0 = 0 \text{ a } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

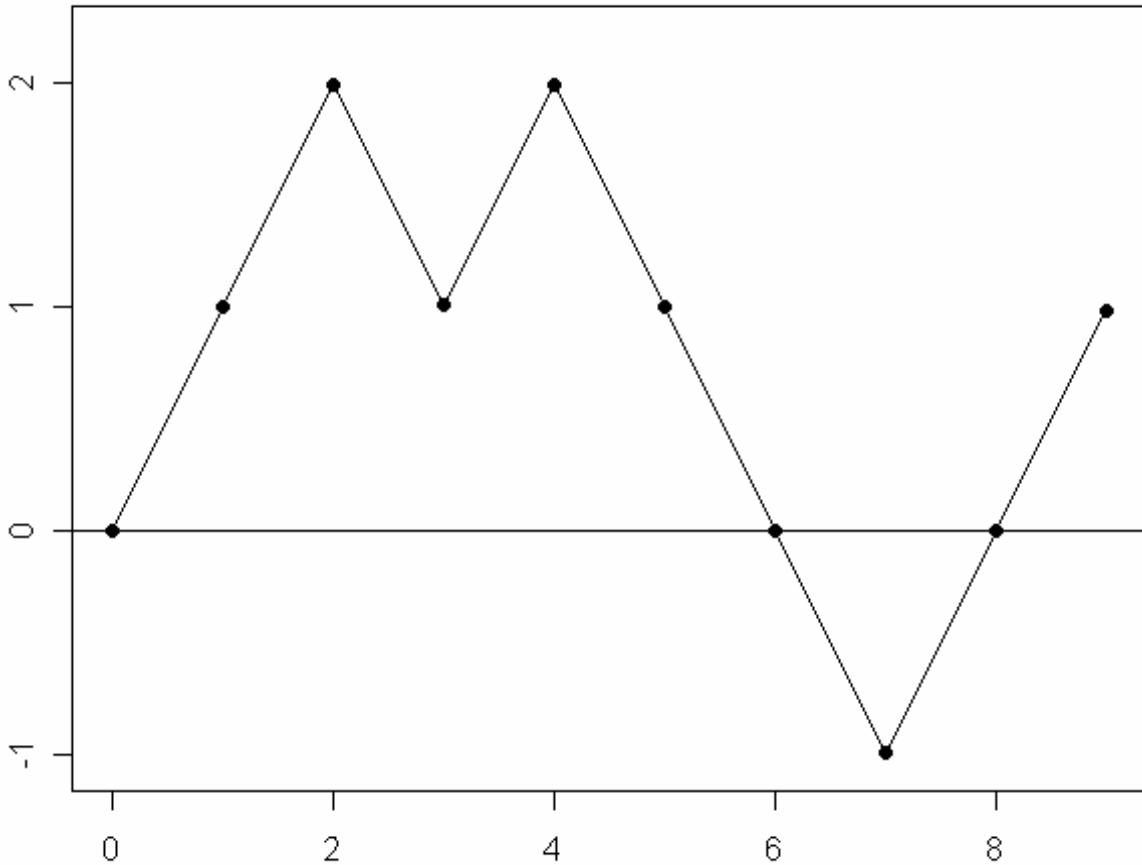
Takto definovanú krivku nazývame trajektória a značíme ju  $C$ . Každá trajektória má svoj počiatok a koniec. V našom prípade si za počiatok označíme bod  $(a, b)$  a koniec bod  $(c, d)$ . Platí, že oba tieto body sú bodmi na  $C$  také, že pre všetky  $(t_i, s_i) \in C$  platí:

$a \leq t_i \leq c$ . Dĺžku trajektórie  $C$  potom dostávame ako rozdiel  $c - a$ .

Jednotlivé prvky  $\omega \in \Omega_n$  nám vytvárajú pri grafickom zobrazení trajektóriu, ktorú môžeme matematicky popísať ako:

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} [(i, M_i(\omega)), (i+1, M_{i+1}(\omega))]$$

s počiatkom v bode  $(0,0)$  a koncom v bode  $(n, M_n(\omega))$ . Teda na grafickej prezentácii  $\Omega_n$  potom môžeme sledovať priebeh hry, kedy prvý hráč vedie nad druhým hráčom počas hry a kedy je hra nerozhodná (obrázok 1).



**Obrázok 1**

Uvažujme  $c, d$  reálne čísla také, že  $0 \leq |d| \leq c$ . Potom počet kriviek s počiatkom v bode  $(0,0)$  a koncom v bode  $(c,d)$  je daný súčtom  $c + d$ . Ak súčet  $c + d$  je nepárny, potom je počet kriviek nulový. Ak je párný, potom je počet rovný :

$$2^c P_c(M_c = d) = 2^c P_c(S_c = (c + d)/2) = \binom{c}{(c + d)/2}.$$



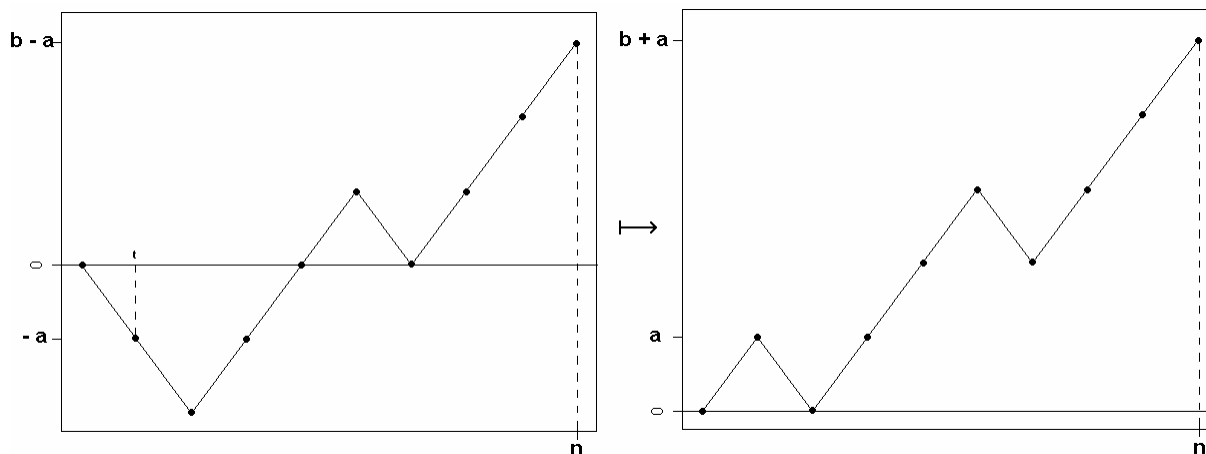
## Veta 1.1 Princíp reflexie

Nech  $a, b \geq 0$  a  $n \geq 0$  sú reálne čísla. Potom:

$$P_n(M_n = b - a; M_k = -a; k \in [0, n]) = P_n(M_n = b + a). \quad [1, \text{str. 62}]$$

### Dôkaz:

Prípad kedy  $a = 0$  je triviálny, zamerajme sa teda na prípad kedy  $a > 0$ . Využijeme pritom grafickú reprezentáciu  $\Omega_n$ . Idea dôkazu je založená na predpoklade, že počet kriviek s počiatkom v bode  $(0, 0)$  a koncom v bode  $(n, b - a)$ , ktoré pretínajú horizontálu  $y = -a$  je rovnaký ako počet kriviek s počiatkom v bode  $(0, 0)$  a koncom v bode  $(n, b + a)$ . Posunutím každej krivky prvého typu o  $a$  jednotiek smerom nahor dostávame ekvivalentný počet kriviek s počiatkom v bode  $(0, a)$  a koncom v bode  $(n, b)$  ktoré, pretínajú  $x$ -ovú os (označme si ich ako krivky druhého typu). Tento počet je rovný počtu kriviek s počiatkom v bode  $(0, -a)$  a koncom v bode  $(n, b)$  (tieto krivky označme ako krivky druhého typu). Ak  $C$  je krivka prvého typu, potom  $t(C)$  predstavuje také najmenšie  $i > 0$ , že  $(i, 0) \in C$ . Krivka  $C$  je spojením kriviek  $C_1$  a  $C_2$ .  $C_1$  je krivka s počiatkom v bode  $(0, 0)$  a koncom v bode  $(t(C), 0)$ . Krivka  $C_2$  má počiatok v bode  $(t(C), 0)$  a koniec v bode  $(n, b)$ . Každé krivke  $C$  priradíme krivku  $C^l$ , ktorá je spojením  $C_2$  a zobrazenia krivky  $C_1$  cez  $x$ -ovú os. Krivka  $C^l$  je krivkou druhého typu a zobrazenie  $C \leftrightarrow C^l$  je bijekcia medzi jednotlivými množinami kriviek oboch typov. Princíp dôkazu môžeme jasnejšie sledovať na obrázku 2.



Obrázok 2

Δ

### Tvrdenie 1.1

Platí, že:

$$P_{2n}(M_1 \neq 0, M_2 \neq 0, \dots, M_{2n} \neq 0) = 2P_{2n}(M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_{2n} > 0) \quad \text{a}$$

$$P_{2n}(M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_{2n} > 0) = 2^{-(2n+1)} \binom{2n}{n}.$$

**Dôkaz:**

Prvá rovnosť je zrejmá zo symetrie. Pre dôkaz druhej rovnosti využijeme opäť grafickú reprezentáciu  $\Omega_n$ . Pozrime sa teraz na krivky s počiatkom v bode  $(0,0)$  a dĺžky  $2n$ , ktoré ležia v hornej polovici grafu od osy  $x$  a nevracajú sa k nej (Z-krivky). Potrebujeme teda zhrnúť pre  $k = 1, \dots, n$  počet kriviek s počiatkom v bode  $(1,1)$  a koncom v bode  $(2n, 2k)$ , ktoré nepretínajú  $x$ -ovú osu. Je iba jedna krivka, ktorá spája body  $(1,1)$  a  $(2n, 2n)$  a nevracia sa k  $x$ -ovej ose. Ak  $1 \leq k < n$ , potom počet kriviek takéhoto typu je rovný počtu kriviek spájajúcich body  $(1,1)$  a  $(2n, 2k)$ , ktoré sa nevracajú k  $x$ -ovej ose. Ich počet je rovný:

$$\binom{2n-1}{n+k-1} \text{ (T-krivky).}$$

Na základe princípu reflexie je počet T-kriviek rovný počtu kriviek spájajúcich body  $(-1,1)$  a  $(2n, 2k)$ , ktoré pretnú osu  $x$  a tých je:

$$\binom{2n-1}{n+k}.$$

Z toho vyplýva, že počet Z-kriviek je:

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right).$$

Toto číslo môžeme zjednodušiť na :  $\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ .  $\Delta$

**Tvrdenie 1.2**

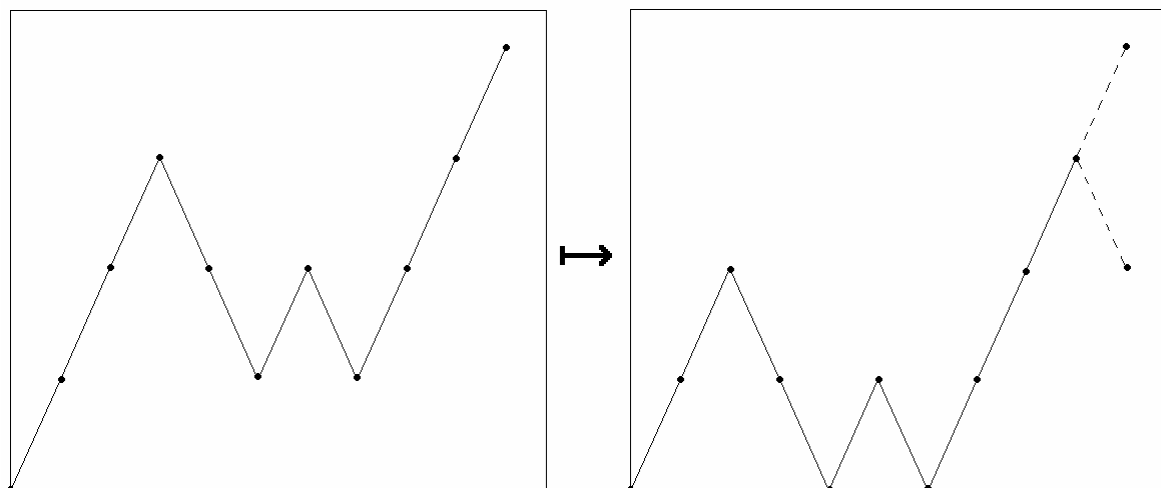
Pravdepodobnosť, že druhý hráč nebude vyhrávať ani raz počas hry je :

$$P_{2n}(M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, \dots, M_{2n} \geq 0) = 2^{-2n} \binom{2n}{n}.$$

**Dôkaz:**

Chceme ukázať, že:  $P_{2n}(M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, \dots, M_{2n} \geq 0) = 2P_{2n}(M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_{2n} > 0)$ .

Počet kriviek začínajúcich v bode  $(0,0)$  dĺžky  $2n$ , ktoré ležia v hornej polovici grafu od osy  $x$ , a nevracajú sa k nej (R-krivky) je rovný počtu kriviek, ktoré začínajú v bode  $(0,0)$  s dĺžkou  $2n-1$  ležiacich v hornej polovici grafu od osy  $x$ , vrátane osy  $x$  (P-krivky). Toto platí na základe bijekcie medzi množinami oboch typov kriviek. Teda priradíme krivku druhého typu ku každej krivke prvého typu, posunutím a preložením počiatočného úseku krivky o jednu jednotku do ľava a o jednu jednotku smerom dole.



**Obrázok 3**

Nesmieme však zabudnúť na predpoklad, že  $M_{2n-1}$  sa nikdy nerovná nule. Potom každej P-krivke môžeme jednoznačne priradiť dve R-krivky. Aby sme to mohli previesť, je nutné pridať časť o dĺžke 1 a sklonom 1 alebo -1 na koniec krivky o dĺžke  $2n-1$ . Tým dostávame, že množstvo prípadov kedy platí  $(M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, \dots, M_{2n} \geq 0)$  je dvojnásobkom prípadov kedy  $(M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_{2n} > 0)$ .  $\Delta$

Na základe predchádzajúcich tvrdení môžeme povedať, že je relatívne ľahké určiť koľko trajektórií spája dva body bez obmedzenia. Avšak v prípade ak máme obmedzenia na trajektóriu, určiť počet kriviek je o niečo ťažšie.

Princíp reflexie nám umožňuje určiť pravdepodobnosť, že prvý hráč bude viesť až do posledného hodu, ktorý vyrovná skóre hry a hra skončí nerozhodne.

### **Tvrdenie 1.3**

$$P_{2n}(M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_{2n-1} > 0, M_{2n} = 0) = \frac{1}{n2^{2n}} \binom{2n-2}{n-1}. \quad [1, \text{str } 65]$$

### **Dôkaz:**

Chceme zistiť počet kriviek začínajúcich v bode  $(1,1)$ , končiacich v bode  $(2n-1,1)$  ležiacich v hornej polovici grafu od osy  $x$ . Ich počet je ekvivalentný rozdielu počtu kriviek z bodu  $(1,1)$  do bodu  $(2n-1,1)$  a kriviek z bodu  $(1,1)$  do bodu  $(2n-1,1)$ , ktoré pretínajú v niekom bode osu

$x$ . Tento rozdiel je rovný  $\binom{2n-2}{n-1}$ . Na základe princípu reflexie je počet kriviek s rovnakým

počiatočným a koncovým bodom, ktoré pretínajú osu  $x$  rovný počtu kriviek, ktoré začínajú v bode  $(1,-1)$ , končia v bode  $(2n-1,1)$  a ich počet je  $\binom{2n-2}{n-2}$ . A teda

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}. \quad \Delta$$

**Dôsledok:**

Ak  $n, k$  sú reálne čísla také, že  $0 \leq k < n$  potom:

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2(n-j)-k}{n-j} = \binom{2n-k-1}{n},$$

špeciálne:  $2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2(n-j)}{n-j} = \binom{2n}{n}$ , pre  $k = 0$ .

**Dôkaz:**

Pozrime sa na počet kriviek so začiatkom v bode  $(0,0)$  a koncom v bode  $(2n-k, k)$  z dvoch strán. Z jednej strany je počet týchto kriviek  $\binom{2n-k}{n}$ . Na druhej strane je počet takýchto

kriviek rovný počtu kriviek so začiatkom v bode  $(1,1)$  a koncom v bode  $(2n-k, k)$ , ktorých je  $\binom{2n-k-1}{n-1}$  plus počet kriviek so začiatkom v bode  $(1,-1)$  a koncom v bode  $(2n-k, k)$ .

Pre každú krivku so začiatkom v bode  $(1,-1)$  a koncom v bode  $(2n-k, k)$  existuje také najmenšie reálne číslo  $1 \leq j \leq n-k$ , pre ktoré krivka prechádza bodom  $(2j, 0)$ . A teda počet takýchto kriviek je rovný celkovému súčtu kriviek z bodu  $(0,0)$  do bodu  $(2j, 0)$ , ktoré ležia v dolnej časti grafu a počtu kriviek z bodu  $(2j, 0)$  do  $(2n-k, k)$ . Na základe tvrdenia 1.3 nám to implikuje, že počet kriviek z bodu  $(1,-1)$  do bodu  $(2n-k, k)$  je  $\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2(n-j)-k}{n-j}$ .

Δ

## 1.3 Zákon arku sínu

Zaved'me si postupnosť náhodných premenných  $T'_n$ , ktoré sú príbuzné premenným  $T_n$ . Nech  $T'_n$  je počet reálnych čísiel ležiacich medzi 1 a  $n$ , takých že padlo viac hláv ako orlov v prvých  $k$  alebo  $k-1$  hodoch mincou. Prostredníctvom grafickej reprezentácie  $\Omega_n$  je zrejmé, že  $T'_n$  predstavuje pre každú krivku dĺžky  $n$  a začiatku v bode  $(0,0)$  počet základných prvkov krivky, ktoré ležia v hornej polovici grafu. Teda predstavuje počet spojov medzi jednotlivými bodmi náhodnej prechádzky. Formálne to môžeme vyjadriť:

$$T'_n := \#\{k : 0 < k \leq n; (M_k > 0 \text{ alebo } M_{k-1} > 0)\}.$$

Každý základný prvok má formu v tvare :

$$[(2k-1, M_{2k-1}), (2k, M_{2k-1} \pm 1)] \text{ alebo } [(2k-2, M_{2k-1} \pm 1), (2k-1, M_{2k-1})], \text{ kde } M_{2k-1} \neq 0.$$

Prvok je v hornej časti grafu iba a len vtedy ak  $M_{2k-1} > 0$ , a teda:

$$T'_{2n} := 2\#\{k : 0 < k \leq n; M_{2k-1} > 0\}.$$

#### Tvrdenie 1.4

Pre každé  $n > 0$  a  $k$  medzi 0 a  $n$  platí:

$$P_{2n}(T'_{2n} = 2k) = 2^{-2n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

#### Dôkaz:

Máme:

$$(T'_{2n} = 2n) = (M_k \geq 0; \forall k \in [1, 2n])$$

pravdepodobnosť tejto udalosti je daná tvrdením 1.2. Tvrdenie teda dokážeme indukciou podľa  $n$ .

Pre  $n = 1$  je pravdivosť tvrdenia jasná. Určíme pevné  $N > 1$ , a nech tvrdenie platí pre všetky  $n$  medzi 1 a  $N-1$  a všetky  $k$  medzi 1 a  $n$ . Tak isto pravdepodobnosť

$$(T'_{2N} = 0) = (M_k \leq 0; \forall k \in [1, 2N])$$

je daná tvrdením 1.2. Ak  $0 < T'_{2N} < 2N$ , potom  $\exists j : M_{2j} = 0; j \in [1, N]$ .

Pre každé  $w \in \Omega_{2n}$  také, že  $0 < T'_{2n}(w) < 2N$  máme:

$$t(w) := \min\{j > 0 : M_{2j}(w) = 0\}.$$

Nech je dané pevné  $k$  medzi 0 a  $N$ . Potom:

$$P_{2N}(T'_{2N} = 2k) = \sum_{j=1}^N P_{2N}(T'_{2N} = 2k \wedge t = 2j \wedge M_1 > 0) + \sum_{j=1}^N P_{2N}(T'_{2N} = 2k \wedge t = 2j \wedge M_1 < 0).$$

Ak  $j > k$ , prípad  $(T'_{2N} = 2k \wedge t = 2j \wedge M_1 > 0)$  je rovný nule. Ak  $j \leq k$ , potom množstvo takýchto prípadov je rovné počtu kriviek s počiatkom v bode  $(0,0)$  a koncom v bode  $(2j,0)$  umiestnených v otvorenej hornej časti grafu medzi počiatkom a koncom navýšení o počet kriviek s počiatkom v  $(2j,0)$  o dĺžke  $2(N-j)$ , ktorých  $2(k-j)$  základných častí leží v hornej časti grafu. Počet kriviek s počiatkom  $(0,0)$  a koncom  $(2j,0)$  umiestnených v otvorenej hornej časti grafu medzi počiatkom a koncom je daný tvrdením 1.3 a je rovný  $\frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1}$ . Počet kriviek z bodu  $(2j,0)$  a dĺžky  $2(N-j)$ , ktorých  $2(k-j)$  základných

prvkov leží v hornej časti grafu je daný indukciou a rovný :

$$\binom{2(k-j)}{k-j} \binom{2(N-k)}{N-k}.$$

Pričom :

$$P_{2N}(T'_{2N} = 2k \wedge t = 2j \wedge M_1 > 0) = \frac{1}{j 2^{2N}} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2(k-j)}{k-j} \binom{2(N-k)}{N-k}.$$

Ak  $j > N-k$ , potom prípad  $P_{2N}(T'_{2N} = 2k \wedge t = 2j \wedge M_1 < 0)$  je rovný nule. Ak  $j \leq N-k$ , potom mohutnosť množiny týchto prípadov je rovná počtu kriviek s počiatkom v bode  $(0,0)$  a koncom v bode  $(2j,0)$ , ktoré ležia v hornej časti grafu medzi počiatčným a koncovým

bodom. Ich počet je daný tvrdením 1.3, a teda rovný  $\frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1}$ . Počet je ďalej navýšený

o počet kriviek s počiatkom v bode  $(2j,0)$  a dĺžkou  $2(N-j)$ , ktorých  $2k$  základných častí

leží v hornej časti grafu, a na základe indukcie je rovný  $\binom{2k}{k} \binom{2(N-j-k)}{N-j-k}$ .

Teda:

$$P_{2N}(T'_{2N} = 2k \wedge t = 2j \wedge M_1 < 0) = \frac{1}{j2^{2N}} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2k}{k} \binom{2(N-j-k)}{N-j-k}.$$

Dôkaz skompletizujeme použitím druhej rovnosti z dôsledku tvrdenia 1.3:

$$\begin{aligned} P_{2n}(T'_{2n} = 2k) &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j2^{2N}} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2(k-j)}{k-j} \binom{2(N-k)}{N-k} + \\ &\sum_{j=1}^{N-k} \frac{1}{j2^{2N}} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2k}{k} \binom{2(N-j-k)}{N-j-k} = \frac{1}{2} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2N}} \binom{2(N-k)}{N-k} + \frac{1}{2^{2N}} \binom{2k}{k} \frac{1}{2} \binom{2(N-k)}{N-k} = \\ &= \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2N}} \binom{2(N-k)}{N-k}. \end{aligned} \quad \Delta$$

Nasledujúce tvrdenie nám dokazuje, že náhodná premenná  $T'_{2n}$  spĺňa Zákon arku sínu.

### Tvrdenie 1.5

Pre každé  $a, b$  také, že  $0 \leq a \leq b \leq 1$  platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(2na \leq T'_{2n} \leq 2nb) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} dx.$$

### Dôkaz:

Pozrime sa najprv na prípad kedy  $0 < a < b < 1$ . Z tvrdenia 1.4 a priamej aplikácie Stirlingovho vzorca, ktorý platí pre veľké  $n$  v tvare  $n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$  potom vyplýva, že:

$$P_{2n}(T'_{2n} = 2k) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} (1 + \varepsilon(k))(1 + \varepsilon(n-k)), \text{ kde}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0 \text{ pre } 0 < k < n. \text{ A teda } P_{2n}(T'_{2n} = 2k) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} (1 + \varepsilon(n, k)) \text{ kde}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n, k) = 0 \text{ všeobecne ak } k \in [na, nb] \text{ je reálne číslo. Z toho vyplýva, že:}$$

$$P_{2n}(2na \leq T'_{2n} \leq 2nb) = \sum_{na \leq k \leq nb} P_{2n}(T'_{2n} = 2k) \approx \sum_{na \leq k \leq nb} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \approx \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^n \chi_{[a,b]} \left( \frac{k}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \left( 1 - \frac{k}{n} \right)}}$$

pričom posledná suma je prepísaná prostredníctvom Riemannovej sumy, ktorá sa blíži k

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \text{ pre } n \text{ idúce do nekonečna.}$$

Nech  $\varepsilon > 0$  pevné. Ak integrál  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$  konverguje, pre všetky dostatočne malé  $a > 0$ ,

potom:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx < \varepsilon \text{ a } \frac{1}{\pi} \int_{1-a}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx < \varepsilon.$$

Uvažujme ďalej pevné  $a$ . Na základe prvej časti dôkazu, platí:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_a^{1-a} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx - P_{2n}(2na \leq T'_{2n} < 2n(1-a)) \right| < \varepsilon, \text{ pre dostatočne veľké } n.$$

Ďalej :

$$P_{2n}(T'_{2n} < 2na) + P_{2n}(2na \leq T'_{2n} < 2n(1-a)) + P_{2n}(T'_{2n} \geq 2n(1-a)) = 1$$

a integrál  $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 1$ .

Z toho teda môžeme dedukovať:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{1-a}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx - P_{2n}(T'_{2n} < 2na) - P_{2n}(T'_{2n} \geq 2n(1-a)) \right| < \varepsilon \text{ pre veľké } n.$$

Teda:

$$P_{2n}(T'_{2n} < 2na) + P_{2n}(T'_{2n} \geq 2n(1-a)) < 3\varepsilon.$$

Tým sme dokázali, že existuje také  $a > 0$  pre ktoré platí:  $P_{2n}(T'_{2n} < 2na) < 3\varepsilon$

pre dostatočne veľké  $n$ . Potom  $P_{2n}(T'_{2n} < 2na)$  je neklesajúca funkcia pre  $a$  idúce k nule.

Teda pre  $a$  idúce k nule sa dostávame k tomu, že:

$$\lim_{a \rightarrow 0} P_{2n}(T'_{2n} < 2na) = 0 \text{ rovnomerne pre pevné } n.$$

Následne opätovným použitím prvého kroku dôkazu dostávame:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(T'_{2n} < 2nb) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \text{ pre všetky } b \in (0,1).$$

Tak isto platí ak  $0 < a < b < 1$  potom:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(2na < T'_{2n} < 2nb) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$\text{a } \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(T'_{2n} < 2na) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Δ

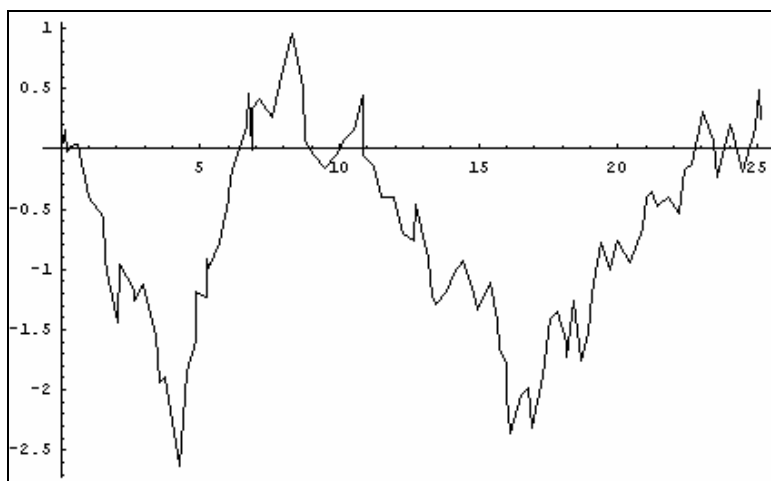
## Veta 1.2 Zákon arku sínu

Pre každé reálne  $\alpha$  ležiace medzi 0 a 1 platí:

$$P_n(T_n < n\alpha) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}$$

pre  $n$  idúce do nekonečna.

[1, str 60]



Obrázok 4: Graf náhodnej prechádzky o 100 krokoch

### Dôkaz:

Predchádzajúce tvrdenia a ich dôkazy nám pripravili podklad pre dôkaz tejto vety a teda stačí už len dôkaz dokončiť a to porovnaním náhodných premenných  $T_n$  a  $T'_n$ .

Keďže :

$$T_{2n} = T'_{2n} - \#\{k : 1 \leq k \leq n; M_{2k-1} > 0 \wedge M_{2k} = 0\} \quad \text{z toho vyplýva, že:}$$

$$|T_{2n} - T'_{2n}| \leq \#\{k : 1 \leq k \leq n; M_{2k} = 0\} = U_{2n}.$$

Zo zákona návratu do počiatku vyplýva, že :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(U_{2n} > 2n\varepsilon) = 0 \text{ pre všetky } \varepsilon > 0.$$

Pravdaže môžeme previesť dôkaz aj tohto dôsledku.

Vieme, že :

$$E_{2n}[U_{2n}] = E_{2n}\left[\sum_{k=1}^n \chi_{(M_{2k}=0)}\right] = \sum_{k=1}^n P_{2n}(M_{2k} = 0) = \sum_{k=1}^n 2^{-2k} \binom{2k}{k}.$$

Z Markovovej nerovnosti vyplýva, že:

$$P_{2n}(U_{2n} > 2n\varepsilon) \leq \frac{1}{2n\varepsilon} \sum_{k=1}^n 2^{-2k} \binom{2k}{k} \text{ pre všetky } \varepsilon > 0.$$

Teraz už ľahko dokážeme, že:  $\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-2k} \binom{2k}{k} = 0$  s použitím Stirlingovej formuly, a teda na základe Cesárovhovho princípu vyplýva, že:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(U_{2n} > 2n\varepsilon) = 0$ .



Keďže prípad  $(T_{2n} < 2n\alpha)$  je obsiahnutý v zjednotení

$(|T_{2n} - T'_{2n}| > 2n\varepsilon) \cup (T'_{2n} \leq 2n(\alpha + \varepsilon))$ , máme teda:

$$P_{2n}(T_{2n} < 2n\alpha) \leq P_{2n}(|T_{2n} - T'_{2n}| > 2n\varepsilon) + P_{2n}(T'_{2n} \leq 2n(\alpha + \varepsilon)).$$

Na jednej strane máme  $P_{2n}(|T_{2n} - T'_{2n}| > 2n\varepsilon) \leq P_{2n}(U_{2n} \leq 2n\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , na druhej strane z tvrdenia 1.5 vyplýva, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(T'_{2n} \leq 2n(\alpha + \varepsilon)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \text{ a } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$\text{preto teda: } \limsup_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(T_{2n} < 2n\alpha) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Z tvrdenia 1.5 ďalej priamo vyplýva, keďže  $T_{2n} \leq T'_{2n}$ , potom:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(T_{2n} < 2n\alpha) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx. \text{ Prichádzame teda k záveru, že:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(T_{2n} < 2n\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

$$\text{Na dokončenie dôkazu je potrebné ešte overiť: } \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1}(T_{2n+1} < (2n+1)\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

To však jasne vyplýva z faktu, že:

$$P_{2n+1}(T_{2n+1} < (2n+1)\alpha) \leq P_{2n}(T_{2n} < (2n+1)\alpha) \text{ a}$$

$$P_{2n+1}(T_{2n+1} < (2n+1)\alpha) \geq P_{2n+2}(T_{2n+2} < (2n+1)\alpha).$$

A tý sme zákon dokázali. Δ

Určíme následne explicitné rozdelenie náhodnej premennej  $U_{2n}$ . Je jasné, že táto náhodná premenná nadobúda len hodnoty medzi 0 a  $n$ . Pre každé reálne číslo  $k$  ležiace medzi 0 a  $n$  platí:  $P_{2n}(U_{2n} = k) = 2^{-2n}$ , táto pravdepodobnosť rastie s počtom kriviek s počiatkom v bode  $(0,0)$  a dĺžkou  $2n$ , ktoré pretínajú x-ovú os v presne  $k+1$  bodoch.

### Tvrdenie 1.6

Pre každé  $k$  medzi 0 a  $n$  platí:

$$P_{2n}(U_{2n} = k) = \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2n-k}{n}, \text{ kde } P_{2n}(U_{2n} = k) \text{ je klesajúcou funkciou } k.$$

**Dôkaz:**

Vychádzajme z tvrdenia 1.1, v ktorom sme dokázali formulu:  $P_{2n}(U_{2n} = 0) = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$ .

Použijeme teda indukciu podľa  $n$ , aby sme dokázali obecnú formulu.

Ak  $U_{2n}(w) > 0$ , potom existuje také najmenšie  $j \geq 1$ , že  $M_{2j}(w) = 0$ .

Nech  $t(w)$  je  $j$  a  $k > 0$  potom:  $P_{2n}(U_{2n} = k) = \sum_{j=1}^n P_{2n}(t = j \wedge U_{2n} = k)$ .

Ak  $j > n - k + 1$ , potom je množina pre  $(t = j \wedge U_{2n} = k)$  prázdna. Ak  $j \leq n - k + 1$ , potom mohutnosť množiny je rovná počtu kriviek medzi bodmi  $(0,0)$  a  $(2j,0)$ , ktoré nepretínajú osu  $x$  medzi počiatočným a koncovým bodom, navýšením o krivky s počiatkom v bode  $(2j,0)$ , dĺžkou  $2n-2j$ , ktoré pretínajú osu  $x$  v presne  $k$  bodoch. Tento počet je priamo daný na základe tvrdenia 1.2 a indukcie. Dochádzame teda k záveru, že:

$$\#(t = j \wedge U_{2n} = k) = \frac{2}{j} \binom{2j-2}{j-1} 2^{k-1} \binom{2n-2j-k+1}{n-j}.$$

Z toho vyplýva:

$$\#(U_{2n} = k) = 2^k \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1} \binom{2n-2j-k+1}{n-j},$$

a na základe dôsledku tvrdenia 1.3, dochádzame k záveru:  $\#(U_{2n} = k) = 2^k \binom{2n-k}{n}$ .  $\Delta$

**Veta 1.3 Zákon návratu do počiatku**

Pre každé  $\alpha > 0$  platí :

$$P_n(U_n < \alpha\sqrt{n}) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

pre  $n$  idúce do nekonečna. [1, str 61]

**Dôkaz:**

Nech  $\alpha > 0$  je pevne zvolené reálne číslo. Na základe tvrdenia 1.6 a Stirlingovej formuly môžeme odhadnúť  $P_{2n}(U_{2n} = k)$  ak  $0 \leq k < \alpha\sqrt{2n}$ :

$$P_{2n}(U_{2n} = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2n-k}{n(n-k)}} \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{k}{2(n-k)}\right)^{n-k} \left(1 + O_u\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Odtiaľ plyní:

$$P_{2n}(U_{2n} = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{n}} \left( 1 + O_u \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) * \exp \left[ n \left( -\frac{k}{2n} - \frac{k^2}{8n^2} \right) + (n-k) \left( \frac{k}{2(n-k)} - \frac{k^2}{8(n-k)^2} \right) + O_u \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

$$\text{a teda : } P_{2n}(U_{2n} = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{n}} \exp \left( -\frac{k^2}{4n} \right) \left( 1 + O_u \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Tento odhad , obecné pre  $k$  , nám umožňuje prepísať pravdepodobnosť , a to do nasledujúcej formy:

$$P_{2n}(U_{2n} < \alpha\sqrt{2n}) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{0 \leq k < \alpha\sqrt{2n}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{\sqrt{2n}} \right)^2 \right) \left( 1 + O_u \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Ak sa na formu pozeráme ako na Riemannovu sumu potom:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(U_{2n} < \alpha\sqrt{2n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha \exp \left( -\frac{1}{2} x^2 \right) dx.$$

Konečne teda  $U_{2n+1} = U_{2n}$  keďže  $M_{2n+1} \neq 0$  vždy.

Teda:

$$P_{2n+1}(U_{2n+1} < \alpha\sqrt{2n+1}) = P_{2n}(U_{2n} < \alpha\sqrt{2n+1}) \text{ a z toho vyplýva, že:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{2n}(U_{2n} < \alpha\sqrt{2n+1}) - P_{2n}(U_{2n} < \alpha\sqrt{2n})) = 0.$$

$$\text{Dokazali sme tým, teda že: } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(U_n < \alpha\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Δ

## 2. Wienerov proces

### 2.1 Náhodné procesy

#### Definícia 2.1

Nech  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravdepodobnostný priestor a nech  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Množina reálnych náhodných veličín  $\{X(t), t \in T\}$  definovaných na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sa nazýva náhodný proces. [3, str 14]

Uvedme si príklady náhodných procesov, ktoré sú dôležité v praxi a sú spojené so Zákomom arku sínu. Typickým príkladom je rozsiahla trieda tzv. Markovových procesov. V nej môžeme nájsť procesy s veľmi rozšíreným použitím nielen v teoretickej fyzike či štatistike, ale aj v pomerne mladých oboroch ako sú finančná matematika alebo bankovníctvo. Z hľadiska doterajšieho štúdia sa zameriame práve na tie typy, ktoré sa využívajú v posledných dvoch spomenutých.

Pozrime sa ale najprv na samotný Markovov proces a jeho vlastnosti. V základe, pre naše potreby, budeme rozlišovať dva typy Markovových procesov a to procesy s diskretnými stavmi a diskretným časom a Markovove procesy s diskretnými stavmi a spojitým časom. Obecne sa na ne pozeráme ako na Markovove reťazce jednotlivých typov.

#### Definícia 2.2

Postupnosť celočíselných náhodných veličín  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  sa nazýva Markovov reťazec s diskretným časom a množinou stavov  $S$ , ak platí:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pre všetky  $n = 0, 1, \dots$  a pre všetky  $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ , také že:

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0.$$

Tento vzťah nazývame markovova vlastnosť, a hovorí nám, že pravdepodobnosť výsledku v budúcom čase  $n+1$ , ak poznáme výsledok v prítomnom čase  $n$  a výsledky z minulých časov  $n-1, n-2, \dots, 0$  je rovnaká, ako keď poznáme len výsledok v prítomnom čase.

#### Definícia 2.3

Systém celočíselných náhodných veličín  $\{X_t, t \geq 0\}$  definovaných na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sa nazýva Markovov reťazec so spojitým časom a spočítanou množinou stavov  $S$ , ak platí:

$$P(X_{t_1} = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_{t_1} = j | X_s = i)$$

pre všetky  $i, j, i_1, \dots, i_n \in S$  a pre všetky  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$ , pre ktoré:

$$P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) > 0. \quad [3, \text{str } 15]$$

Pričom týmto vzťahom môžeme znovu vyjadriť markovovú vlastnosť a bez ujmy na obecnosti predpokladáme, že  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Obece teda môžeme povedať, že Markovov proces je taký stochastický proces, pre ktorý platí, že ak je daná hodnota  $X(s)$ , potom budúce hodnoty  $X(t)$  pre  $t > s$  môžu závisieť iba na  $X(s)$ , no nie však na predoslych hodnotách  $X(u)$  pre  $u < s$ . Pričom stochastický proces teda na základe definícií chápeme ako  $t$ -parametrický systém náhodných premenných  $\{X(t), t \in I\}$ , kde  $I$  je interval alebo diskretná množina indexov. Na základe týchto poznatkov môžeme teraz formulovať definíciu Brownovho pohybu.

## 2.2 Brownov pohyb

### Definícia 2.4

Brownov pohyb  $\{X(t), t \geq 0\}$  je  $t$ -parametrický systém náhodných veličín pre ktorý platí, že:

- i) všetky prírastky  $X(t + \Delta) - X(t)$  majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom  $\delta^2 \Delta$ .
- ii) pre každé delenie  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  sú prírastky  $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  nezávislé náhodné premené s parametrami podľa bodu i)
- iii)  $X(0) = 0$  a vzorky ciest  $X(t)$  sú spojité v premennej  $t \geq 0$ . [6, str 13]

Brownov pohyb s parametrom  $\delta^2 = 1$  sa nazýva štandardizovaný Wienerov proces. V prípade, že stredná hodnota prírastkov  $X(t + \Delta) - X(t)$  je  $\mu \Delta$  pre každé  $\Delta$ , potom hovoríme o Brownovom pohybe s driftom, ktorý je daný predpisom:  $D(t) = \delta X(t) + \mu t$ , kde  $X(t)$  je Brownov pohyb. Ak nebude uvedené inak, tak v nasledujúcom texte budeme uvažovať štandardizovaný Wienerov proces.

Čo si však pod Brownovým pohybom máme predstavovať? Ako Brownov pohyb sa označuje náhodný pohyb mikroskopických častíc v kvapalnom alebo v plynnom prostredí. Prvý krát ho zaznamenal v roku 1827 botanik Robert Brown, ktorý pozoroval chovanie peľových zrníček vo vode. Toto považoval za dôkaz, že peľ je živý. Pravú podstatu tohto javu objasnil v roku 1905 Albert Einstein, ktorý pritom vychádzal z kinetickej teórie látok. Molekuly v roztoku sa pod vplyvom tepelného pohybu neustále zrážajú, pričom smer a sila týchto zrážok sú náhodné a vďaka tomu je aj poloha častíc náhodná. Model znázorňujúci náhodný pohyb častíc tzv. Wienerov proces, bol nakoniec sformulovaný Norbertom Wienerom.

Vráťme sa však späť k definícii Brownovho pohybu s driftom. Pri skúmaní definície vzniká prirodzená otázka ohľadom vlastností tohto Brownovho pohybu. Či sú jednotlivé vlastnosti od seba vzájomne nezávislé a prečo stredná hodnota a rozptyl prírastkov  $X(t + \Delta) - X(t)$  je proporciálne rovný práve  $\Delta$  a nie niakej inej funkcii od  $\Delta$ .

Predpokladajme nejaké rozdelenie intervalu  $[0, t]$ ,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ , potom jasne:

$$X(t) - X(0) = \sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$$

a teda stredné hodnoty a rozptyly ľavej a pravej strany musia byť rovné.  
Pre strednú hodnotu výrazu  $X(t) - X(0)$  platí podľa definície, že:

$$E(X(t) - X(0)) = \mu(t - 0) = \mu t,$$

na ľavej strane je stredná hodnota náhodnej premennej  $\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$  daná ako:

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mu(t_i - t_{i-1}) = \mu t$$

z toho jasne plynie, že stredné hodnoty premenných  $X(t) - X(0)$  a  $\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$  sa rovnajú.

Je však nutné si uvedomiť, že bez predpokladu pre každý prírastok  $X_i - X_{i-1}$ , ktorý má strednú hodnotu práve  $\mu(t_i - t_{i-1})$  by sme tento výsledok neodvodili.

Pozrime sa aj na rozptyl premenných  $X(t) - X(0)$  a  $\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$ . Z definície nám vyplýva, že :

$$\text{var}(X(t) - X(0)) = \delta^2(t - 0) = \delta^2 t.$$

Pričom pre nezávislé náhodné premenné  $A, B$  platí :  $\text{var}(A + B) = \text{var}(A) + \text{var}(B)$ . Keďže pre preprírastky  $X_i - X_{i-1}$  predpokladáme ich nezávislosť pre rôzne  $i = 1, 2, \dots, n$ , potom platí:

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \delta^2(t_i - t_{i-1}) = \delta^2 t.$$

Znova však musí platiť predpoklad, že každý prírastok  $X_i - X_{i-1}$  má rozptyl práve

$\delta^2(t_i - t_{i-1})$ , inak by rovnosť rozptylov  $X(t) - X(0)$  a  $\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$  neplatila.

Z definície Brownovho pohybu nám ďalej jasne vyplýva, že ak  $\{w(t), t \geq 0\}$  je Wienerov proces, potom pre jeho štatistické parametre strednej hodnoty a rozptylu platí:

$$E(w(t)) = 0 \quad \text{a} \quad \text{var}(w(t)) = t.$$

Ďalej pre distribučnú funkciu rozdelenia pravdepodobnosti Wienerovho procesu platí:

$$P(w(t) < x) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2t}} d\xi.$$

Brownov pohyb  $\{X(t), t \geq 0\}$  s parametrami  $\mu$  a  $\delta$  možno analyzovať aj z hľadiska jeho prírastkov  $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ , pre ktorých strednú hodnotu a rozptyl musí podľa prvého bodu definície Brownovho pohybu platiť :

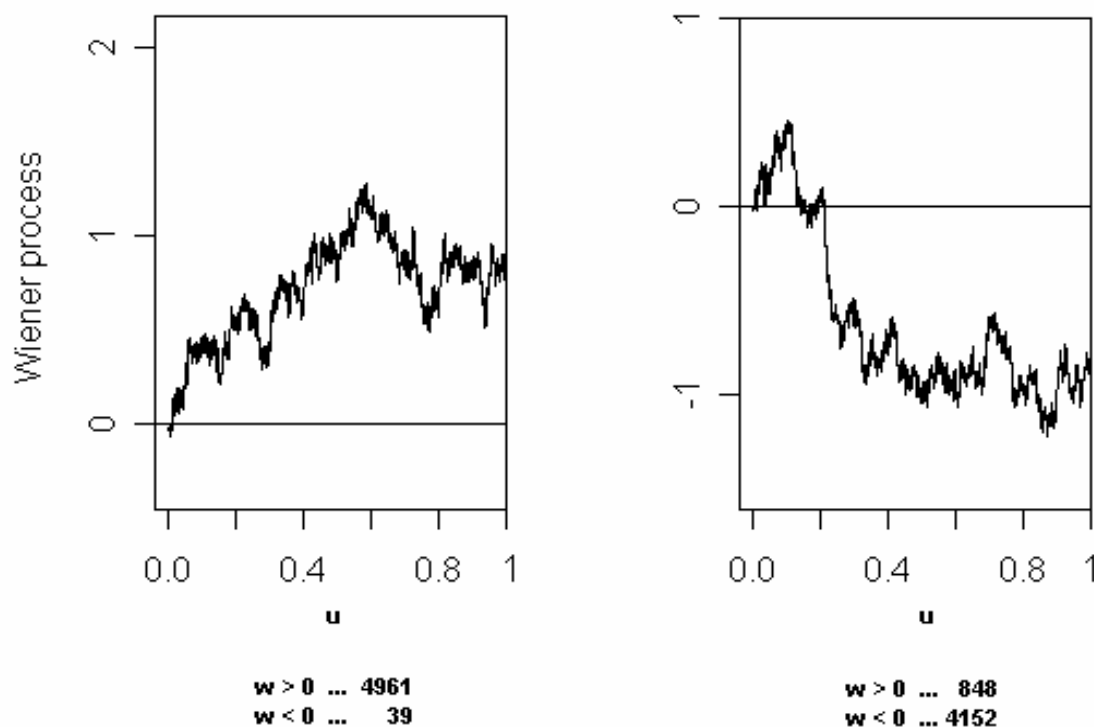
$$E(dX(t)) = \mu dt \quad \text{var}(dX(t)) = \delta dt = \delta \text{var}(dw(t)).$$

To nám však jasne umožňuje charakterizovať Brownov pohyb pomocou dvoch jeho zložiek a tými sú deterministická a fluktučná zložka. Taktiež môžeme prírastky  $dX(t)$  písať v tvare totálneho diferenciálu ako:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t), \text{ kde } (w(t), t \geq 0) \text{ je Wienerov proces.}$$

Takúto rovnicu vyjadrenia prírastkov nazývame stochastická diferenciálna rovnica. Avšak s označením  $dw(t)$  musíme zachádzať opatrne ako so symbolom a to hlavne preto, že Wienerov proces nemá v žiadnom bode deriváciu a má nekonečnú variáciu. Definíciu diferenciálu preň preto nemožno považovať za tak priamočiaru.

Graficky môžeme simulovať Zákon arku sínu tak ako je vidieť na obrázku č.5. Obrázok zobrazuje Wienerov proces, jeden z klasických prípadov aplikácie Zákona arku sínu.



Obrázok 5

V praxi sa často stretávame s Wienerovým procesom nielen v jeho klasickej podobe, ale aj v podobe, v ktorej sa prejavujú jeho rôzne modifikácie. Môžeme sem zahrnúť napríklad už spomenutý geometrický Brownov pohyb a Brownov most ale aj mnohé ďalšie.

## 2.3 Zákon arku sínu pre Wienerov proces

Pozrime sa teraz na priamu súvislosť medzi Wienerovým procesom a v prvej kapitole uvedením Zákom arku sínu. Ak prvý si uvedieme Lévyho Zákon arku sínu pre rozdelenie dĺžky času  $\Gamma_+(n)$ , ktorý Wienerov proces strávi v 1. kvadrante grafu, tj. v intervale  $(0, \infty)$  vzhľadom k osi  $y$ , z celkovej časovej periódy  $[0, n]$ . Podiel času  $T_n$  máme potom daný ako:

$$T_n = \frac{\Gamma_+(n)}{n}.$$

### Veta 2.1 Lévyho Zákon arku sínu

Pre každé  $0 \leq \alpha \leq 1$  a každé  $n \geq 0$  platí:

$$P_n(\Gamma_+(n) \leq n\alpha) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

kde  $\Gamma_+(n) = \int_0^n 1_{(0,\infty)}(W_x) dx$  a  $1_{(0,\infty)}$  je indikátor udalosti keď Wienerov proces  $W$  je

v 1.kvadrante.

Čo sa týka dôkazu tejto vety môžeme ho nájsť v publikácii [4, str 267] v zozname literatúry.

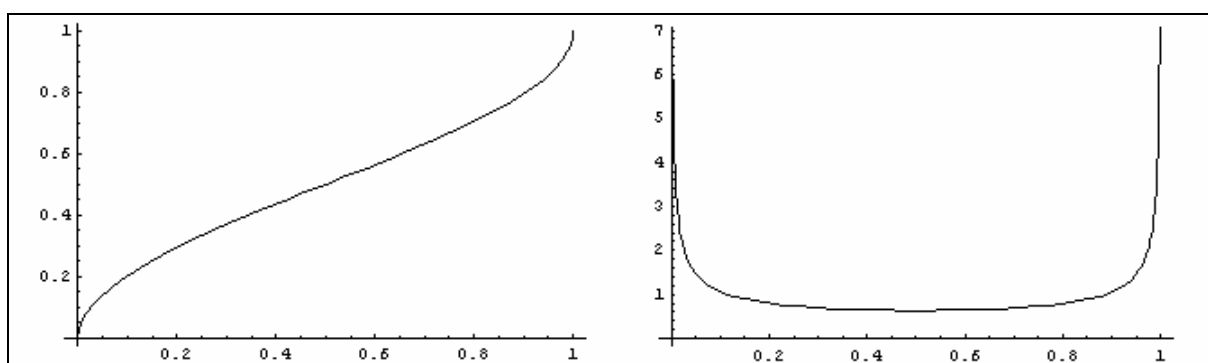
Vzhľadom k symetrii Wienerovho procesu platí táto veta aj pre  $(-\infty, 0)$ , tj. pre

2.kvadrant. Zákon arku sínu je jedným z teoretických faktov, ktoré ukazujú prečo aj tá najspravodlivejšia hra môže vyznieť nespravodlivo pre bežného pozorovateľa. Túto

nespravodlivosť možno vysvetliť pomocou hustoty arku sínu  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ , tá sa hromadí

blízko  $x = 0$  a  $x = 1$ , zatiaľ čo okolo  $x = \frac{1}{2}$  dochádza k minimálnemu hromadeniu. Ako

vidíme na obrázku číslo 6.



Obrázok 6 : priebeh distribučnej funkcie  $2/\pi$  Arkusínus  $\sqrt{x}$  na ľavo a hustota arku sínu na pravo

Hromadenie hustoty má určité zaujímavé následky. Napríklad pre hru hádzania mincou, ktorú sme popísali v prvej kapitole. Zákon arku sínu nám hovorí, že počas dlhého časového intervalu hry je viac ako 20krát pravdepodobnejšia naša výhra po viac ako 98% času hry a nie predpokladaných  $50 \pm 1\%$  času hry, ako by vyplývalo z predpokladu spravodlivosti mince. Vieme teda, že Zákon arku sínu platí pre časti Wienerovho procesu pozrime sa teraz na to, či platí aj pre vybrané časové intervaly.

### Veta 2.2

Nech  $W$  je Wienerov proces, potom pravdepodobnosť že v intervale  $(s, t)$  Wienerov proces

nenadobúda žiadnu nulu je  $\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{s}{t}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$ . [5, str 471]



**Dôkaz:**

Nech  $Z$  je prípad kedy Wienerov proces  $W(t)$  nadobúda aspoň jednu nulu v intervale  $(s, t) \in [0, T]$ . Za predpokladu, že  $T_w$  je prvý časový prechod  $W(t)$  do  $w$  s hustotou  $f_T$ . Na základe symetrie Wienerovho procesu platí, že ak  $W(s) = w$ , potom:

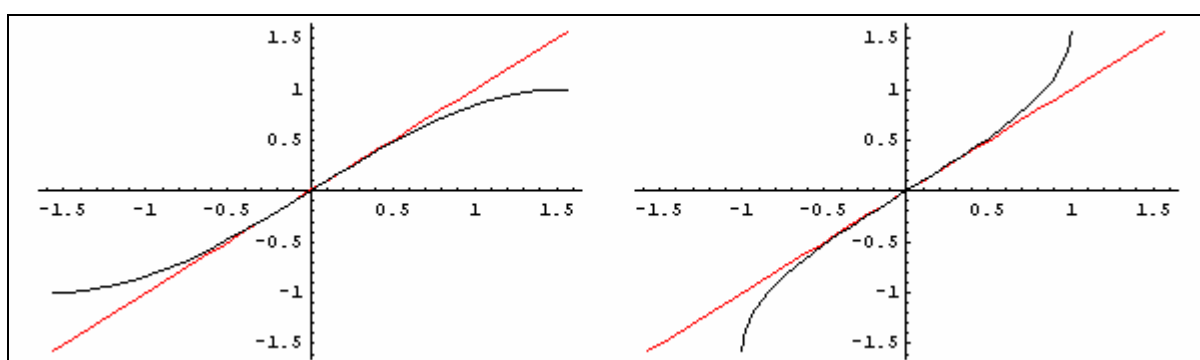
$$P(Z) = P(T_w \leq t - s) = P(T_{-w} \leq t - s).$$

Z podmienky pre  $W(s)$  následne máme:

$$\begin{aligned} P(Z) &= 2 \int_{w=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t-s} f_T(u) f_{W(s)}(-w) du dw \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{s}} \int_{u=0}^{t-s} u^{-3/2} \int_{w=0}^{\infty} w \exp\left\{-\frac{1}{2} w^2 \frac{u+s}{us}\right\} dw du \\ &= \frac{\sqrt{s}}{\pi} \int_0^{t-s} \frac{du}{(u+s)\sqrt{u}} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{t}{s}} - 1 \quad \text{na základe } u = sv^2 \text{ dostávame} \\ &= \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{s}{t}} \quad \text{použitím pravouhlého trojuholníka so stranami } \sqrt{\frac{s}{t}}, \sqrt{1 - \frac{s}{t}}, 1. \end{aligned}$$

Pre požadovanú pravdepodobnosť potom máme:

$P(Z^c) = 1 - P(Z) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{s}{t}}$  s použitím rovnakého pravouhlého trojuholníka s danými stranami. Na základe poznatku, že funkcia sínus je inverznou funkciou k funkcii arkusínus potom dostávame:  $\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{s}{t}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$ . Platnosť tohto poznatku môžeme sledovať na obrázku č.7 osovú súmernosť grafu funkcie sínus s grafom funkcie arkusínus podľa osy 1. a 3. kvadrantu. To však platí len pre prostú funkciu a tou funkcia sínus je.



Obrázok 7: Sin(x), ArcSin(x)

## 2.4 Itôovo lema

Hlavnú úlohu v teórii oceňovania derivátov hrá analýza derivátov, ktorých aktívum pokladáme za náhodnú premennú. Táto premenná spĺňa nejakú stochastickú diferenciálnu rovnicu. Zaoberáme sa teda otázkou zostavenia takej stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá opisuje vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie  $f(x, t)$ . Pre hladkú funkciu platí, že jedna z jej premenných  $x$  je sama jedným z jej riešení. Tým sa dostávame k jednému zo základných nástrojov stochastickej analýzy Itôovej leme.

### Veta 2.3 Itôovo lema

Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice  $dx = \mu(x, t)dt + \delta(x, t)dw$ , kde  $w$  je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie  $f$  je daný vzťahom:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \delta^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \delta(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw. \quad [6, \text{str } 17]$$

### Dôkaz:

Intuitívne môžeme dôkaz Itôovej lemy previesť rozvinutím funkcie  $f = f(x, t)$  do Taylorovho radu stupňa 2. Teda:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) + \text{č.v.r.}$$

Následne, vďaka vlastnosti  $dw = \Phi \sqrt{dt}$ , kde  $\Phi \approx N(0, 1)$  dostávame:

$$(dx)^2 = \delta^2(dw)^2 + 2\mu\delta dw dt + \mu^2(dt)^2 \approx \delta^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2).$$

Podobne výraz  $dx dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$  a teda, rozvoj diferenciálu  $df$  podľa prírastkov  $dt$  a  $dx$  sa dá napísať v tvare:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt.$$

Vzťah pre stochastickú diferenciálnu rovnicu vyplýva z tohto vzťahu dosadením výrazu:

$$dx = \mu(x, t)dt + \delta(x, t)dw \text{ pre diferenciál } dx. \quad \Delta$$

Postup, ktorý sme použili pre odvodenie Itôovej lemy pre funkciu skalárneho argumentu  $x$  sa dá rozšíriť aj na prípad hladkej funkcie  $f = f(\vec{x}, t) : R^n \times R \rightarrow R$  vektorového argumentu  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

Pričom o premenných  $x_i, i = 1, \dots, n$  predpokladáme, že vyhovujú sústave stochastických diferenciálnych rovníc:

$$dx_i = \mu_i(\vec{x}, t)dt + \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(\vec{x}, t)dw_k,$$

kde  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  je vektor Wienerových procesov, ktoré majú vzájomne nezávislé prírastky t.j.:

$$E(dw_i dw_j) = 0 \text{ pre } i \neq j, \quad E((dw_i)^2) = dt.$$

Rovnice pre procesy  $x_i$  môžeme vektorovo zapísať ako:

$$d\vec{x} = \vec{\mu}(\vec{x}, t)dt + K(\vec{x}, t)d\vec{w},$$

kde  $K$  je matica  $n \times n$  :  $K(\vec{x}, t) = (\delta_{ij}(\vec{x}, t))_{i,j=1,\dots,n}$ .

Následne pre prírastok  $df$  hladkej funkcie  $f = f(\vec{x}, t)$  môžeme napísať rozvoj do Taylorovho radu stupňa 2. Tým sa dostávame k výrazu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \nabla_x f \cdot d\vec{x} + \frac{1}{2} \left( (d\vec{x})^T \nabla_x^2 f d\vec{x} + 2 \nabla_x \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{x} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) + \text{č.v.r.},$$

kde  $\nabla_x f$  respektívne  $\nabla_x^2 f$  predstavujú gradient respektívne Hessovu maticu funkcie  $f$  vzhľadom na premenné  $x_1, \dots, x_n$ . Členy  $d\vec{x} dt$  a  $(dt)^2$  budú rovnako ako v odvodení jednorozmerného variantu Itôovej lemy zanedbateľné oproti členu  $dt$ . Hlavnú úlohu teda bude opäť hrať analýza výrazu:

$$\left( d\vec{x} \right)^T \nabla_x^2 f d\vec{x} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Keďže naďalej predpokladáme nezávislosť prírastkov  $dw_i$  a  $dw_j$  pre  $i \neq j$  dostávame, že platí:

$$dx_i dx_j = \sum_{k,l=1}^n \delta_{ik} \delta_{jl} dw_i dw_j + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2) \approx \left( \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} \right) dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2).$$

To však jasne hovorí, že rozvoj diferenciálu  $df$  na základe prírastkov  $dt, d\vec{x}$  môžeme napísať v tvare:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} K : \nabla_x^2 f K \right) dt + \nabla_x f d\vec{x}.$$

Obsahom Itôovej lemy pre funkcie vektorového argumentu je práve vzťah pre prvý diferenciál hladkej funkcie závislej od vektora stochastických procesov. Tento výsledok hrá dôležitú úlohu pri analýze viacfaktorových modelov oceňovania deivátov úrokovej miery.

Výraz  $K : \nabla_x^2 f K$  pritom definujeme ako:  $K : \nabla_x^2 f K = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk}.$

### 3. Oceňovanie finančných derivátov

V predchádzajúcej kapitole sme si pripravili pôdu pre vyslovenie definícií týkajúcich sa priamo oceňovania finančných derivátov. Finančné deriváty definujeme na základe podkladového aktíva pomocou nefinančných derivátov. Nefinančné deriváty predstavujú komoditné deriváty s výnimkou derivátov na drahé kovy. Všetko ostatné, akciové, menové, úrokové a deriváty na akciový index považujeme za finančné deriváty.

#### 3.1 Black-Scholesova rovnica

Odvoďme si teraz matematický model oceňovania finančných derivátov v spojitom čase známy ako Black-Scholesova rovnica. Tento model opisuje časový vývoj ceny derivátu akcie ako funkciu ceny akcie a času ostávajúceho do expirácie opcie. Opcie rozlišujeme na základe spôsobu uzavretia očných transakcií na call tj. kúpne opcie a na put tj. predajné opcie. Pozrime sa na odvodenie Black-Scholesovej diferenciálnej rovnice na príklade európskej kúpnej opcie. Vychádzame z definície kúpnej opcie, že sa jedná o termínovaný kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase  $t = T$  za vopred dohodnutú expiračnú cenu  $E$ . Je nutné poznamenať, že daná strana získava právo ale nie povinnosť kúpiť predmetnú akciu. Toto právo má samo o sebe určitú hodnotu a preto je nutné zaň v čase uzavretia kontraktu  $t = 0$  zaplatiť takzvanú opčnú prémiiu  $V$ . Opčná prémia je tržná cena, za ktorú je opcia obchodovaná na burzovom parkete. Pre obe strany t.j. pre vypisovateľa opcie a pre držiteľa opcie je zaujímavé poznať aká je férová hodnota premie, tak aby ani jedna zo strán nebola zvýhodnená. Označme teda:

$S$  - hodnotu (cenu) aktíva

$V$  - hodnotu derivátu (opcie) na dané aktívum

$T$  - expiračnú dobu (termín vypršania derivátu)

Časovú premennú označme  $t$ , teda  $t \in [0, T]$ . Našou úlohou je nájsť matematickej rovnice, ktorá by opisovala vzťah pre funkciu ceny opcie  $V = V(S, t)$  ako funkcie aktuálnej ceny akcie  $S$  a času  $t$ . Opčná prémia nám následne predstavuje hodnotu  $V(S, 0)$  v čase  $t = 0$  t.j. na počiatku uzatvárania kontraktu.

Samotné odvodenie rovnice pozostáva z dvoch krokov. V prvom z nich sa určuje stochastická rovnica, ktorá vyjadruje ako sa správa ľubovoľná hladká funkcia  $V = V(S, t)$  od stochasticky meniacej sa ceny akcie  $S$  a času  $t$ . Funkciou  $V$  hovoríme všeobecne finančný derivát. V druhom kroku sa zostavuje takzvané samofinancujúce sa bezrizikové portfólio pomocou vhodnej kombinácie kúpy a predaja akcií, opcií a bezrizikových dlhopisov.

Pozrime sa teraz na stochastickú rovnicu pre derivát stochastickej ceny akcie. Na modelovanie náhodného vývoja ceny akcie ako funkcie času  $S = S(t)$  používame stochastickú diferenciálnu rovnicu reprezentujúcu Brownov pohyb:

$$dS = \mu S dt + \delta S dw, \text{ resp. } \left( \frac{dS}{S} = \mu dt + \delta dw \right)$$

kde  $dS$  predstavuje zmenu ceny akcie za časový okamih  $\Delta t$ ,  $\mu$  je očakávaná návratnosť alebo trend vývoja akcie,  $\delta$  je volatilita časového vývoja akcie,  $dw$  predstavuje diferenciál Wienerovho procesu. Z alternatívneho zápisu nám je ďalej jasnejšie, že v časovej analýze je

postatnou informáciou iba relatívna zmena  $\frac{dS}{S}$  a nie absolútna zmena ceny aktíva

$dS$ . Dôvodom je, že hľadaný model musí byť v konečnom dôsledku nezávislý od voľby jednotiek, t.j. výsledná oceňovacia formula musí mať rovnaký tvar nezávisle od toho, či cenu meriame v korunách alebo v inej mene.

Uved'me si ďalej stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie derivátu ceny kcie a času. V prípade, že funkcia  $V = V(S, t)$  je nejaká hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $S$  je sama o sebe funkciou času  $S = S(t)$  a vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici, zaujíma nás akú rovnicu potom spĺňa funkcia  $V = V(S, t)$ . Odpoveďou je Itôova lema, v našom prípade premenná  $S$  vyhovuje stochastickej rovnici, teda:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \text{ a teda } \mu(S, t) = \mu S, \sigma(S, t) = \sigma S.$$

Cena derivátu akcie, teda funkcia  $V(S, t)$  náhodného procesu  $S$ , bude na základe Itôovej lemy vyhovovať stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw.$$

Následne sa pokúsme vytvoriť portfólio pozostávajúce z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Predpoklad samofinancovanej stratégie tvorby portfólia spočíva v dynamickom predaji perspektívne kúpe jednotlivých zložiek portfólia tak, že na udržanie jeho nulovej rizikovosti nie sú potrebné žiadne ďalšie investície a že nákup resp. predaj niektorej zo zložiek portfólia je kompenzovaný predajom resp. nákupom inej zložky portfólia. Môžeme teda povedať, že takéto portfólio spĺňa dve podmienky, a to podmienku nulových investícií a podmienku samofinancovania portfólia. V podstate sa na odvodenie Black-Scholesovej rovnice pozeráme cez Mertonov pohľad, ktorý je odlišný od Blackovho a Scholesovho, a to práve v uvažovaní samofinancujúceho sa portfólia s nulovým rastom investícií. Predpoklad o snahe dosiahnuť bezrizikové portfólio je základným pilierom odvodenia Black-Scholesovej rovnice a vychádza z predstavy o snahe investorov o rizikovo neutrálnu stratégiu obchodovania s cennými papiermi. Navzdory tomu, že predpoklad o rizikovo neutrálnom svete sa dá úspešne spochybniť, budeme ho považovať za východisko pre odvodenie modelu.

Vytvorme následne portfólio pozostávajúce z určitého množstva akcií, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Uvažujeme bezrizikové portfólio, v ktorom sa predaj resp. nákup z uvedených troch zložiek musí hradiť predajom resp. nákupom inej zložky portfólia. Nech teda v čase  $t$  je portfólio zložené z  $Q_S$  kusov opcií v cene  $S$ ,  $Q_V$  kusov akcií v cene

$V$  a peňažného objemu  $B$  bezrizikových dlhopisov nevypĺacajúcich kupóny. Ak označíme  $M_S = SQ_S, M_V = VQ_V$ , potom predpoklad nulových investícií znamená, že:

$$M_S + M_V + B = 0, \text{ pre všetky časy } t \in [0, T], \text{ teda:}$$

$$SQ_S + VQ_V + B = 0.$$

Môžeme teda vyjadriť Mertolovu podmienku samofinancovania portfólia v tvare:

$$SdQ_s + VdQ_v + \delta B = 0,$$

kde  $dQ_s, dQ_v, \delta B$  označujú postupne zmeny počtu akcií, opcií a zmenu objemu bezrizikových dlhopisov držaných v portfóliu, ktoré sme použili na samofinancovanie nákupu resp. predaja akcií a opcií. Pre bezrizikové dlhopisy, ktoré nevyplácajú kupóny platí oceňovacia rovnica :

$$B(t) = B(0)e^{rt}, \text{ kde } r > 0 \text{ je spojitá miera úročenia dlhopisu.}$$

V diferenciálnom tvare môžeme túto rovnicu prepísať ako:

$$dB = rBdt, \text{ ak by zmena objemu dlhopisov bola závislá iba na spojitom úročení istiny } B(0).$$

Keďže však dlhopisy používame aj na samofinancovanie portfólia prostredníctvom ich kúpy či predaja v objeme  $\delta B$ , celková zmena peňažného objemu dlhopisov  $dB$  je potom daná:

$$dB = rBdt + \delta B.$$

Následným spojením troch posledných vzťahov sa dostávame k sústave rovíc:

$$\begin{aligned} 0 &= d(SQ_s + VQ_v + B) \\ &= SdQ_s + VdQ_v + \delta B + Q_s dS + Q_v dV + rBdt \\ &= Q_s dS + Q_v dV - r(SQ_s + VQ_v)dt. \end{aligned}$$

Po vydelení nenulovou hodnotou  $Q_v$  počtu opcií v portfóliu dostávame:

$$dV - rVdt - \Delta(dS - rSdt) = 0, \text{ kde } \Delta = -\frac{Q_s}{Q_v}.$$

Pravdaže platí, že oba náhodné procesy cena akcie  $S$  a aj cena opcie na akciu  $V$  vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam:

$$\begin{aligned} dS &= \mu Sdt + \sigma Sdw \\ dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \end{aligned}$$

Dosadením týchto vzťahov pre diferenciály  $dS$  a  $dV$  dostávame po úpravách:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV - \Delta \mu S + \Delta rS \right) dt + \sigma S \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dw = 0$$

Teraz je cieľom investora skombinovať svoje portfólio pozostávajúce z akcií, opcií a dlhopisov tak, aby neutralizoval vystavenie svojho portfólia voči riziku. Takéto správanie sa investora sa označuje ako averzia investora k riziku. Konštrukcia portfólia je motivovaná snahou vylúčiť z jeho prírastkového vzťahu náhodný člen. Jasne vidíme, že jediný rizikový náhodný člen vo vyššie uvedenej rovnici je reprezentovaný stochastickým členom  $dw$  Wienerovho náhodného procesu. Neutralizovať vplyv tohto stochastického a teda

rizikového člena sa dá výberom pomeru  $\Delta$ , čím dosiahneme aby sa portfólio chovalo deterministicky:  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ .

Dosadením výberu  $\Delta$  do deterministického zvyšku rovnice dostávame výslednú parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) dt = 0$$

teda:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} = rV \quad [6, \text{str } 23]$$

Táto rovnica je známa ako Black-Scholesova rovnica pre oceňovanie ceny derivátov akcií. Cenu portfólia môžeme ďalej určiť na základe:

$$P = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S. \quad [2, \text{str } 27]$$

A prírastok ceny portfólia počas časového intervalu  $\Delta t$  potom máme:

$$\Delta P = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S = \left( -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad [2, \text{str } 27]$$

V praxi sa často stretávame aj s jedným zovšeobecnením Black-Scholesovej rovnice pre prípad akcie, ktorá spojite vypláca dividendy s ročnou úrokovou mierou  $D \geq 0$ . V tomto prípade držaním akcie v hodnote  $S$  získame za čas  $dt$  dividendový podiel  $DSdt$ . Nutné je však poznamenať, že vyplatením dividend samotná cena akcie klesá, čo sa pravdaže prejaví na zníženom trende ceny akcie. Cena akcie teda bude vyhovovať stochastickj rovnici:

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma Sdw.$$

Avšak ziskom dividend dostávame nové prostriedky do nášho samofinancujúceho sa portfólia v celkovom objeme  $DSQ_S dt$  za čas  $dt$ . Túto sumu je možné prirábať do rovnice pre zmenu objemu dlhopisov ako dodatočný príjem, t.j.  $dB = rBdt + \delta B + DSQ_S dt$ .

Následne sa nám tento doplnok prejaví v modifikácii rovnice, ktorá dostane tvar:

$$dV - rVdt - \Delta(dS - (r - D)Sdt) = 0.$$

Opakovaním tohto postupu dochádzame nakoniec k modifikácii rovnice, ktorá zahrňuje aj dividendovú mieru  $D$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} = rV.$$



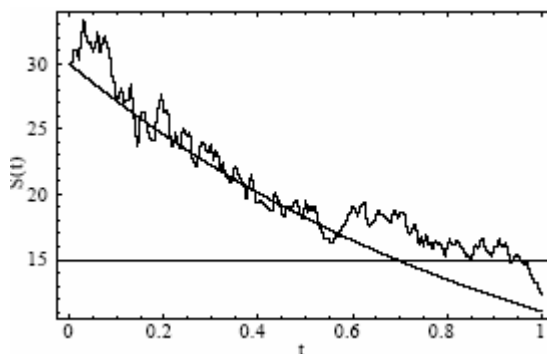
Toto je však iba jednoduchý príklad na priblíženie využitia Wienerovho procesu a teda jeho prostredníctvom aj Zákona arku sínu vo finančnej matematike. V praxi sa stretávame s hlbším využitím Black-Scholesovho rovnice, ktorá je upravovaná pre presné potreby jednotlivých typov opcí, či už európskych, amerických, call či put. Takisto veľkú rolu hrá aj vyplácanie resp. nevyplácanie dividend. Všetky tieto vplyvy sa potom premietajú do výslednej podoby rovnice.

## 3.2 Vyjadrenie ceny akcie

V predchádzajúcej podkapitole sme si pre cenu akcie  $S$  odvodili stochastickú diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$dS = \mu S dt + \delta S dw \text{ kde } w \text{ je Wienerov proces.}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice sa nazýva geometrický Brownov pohyb, v našom prípade predstavuje tento proces cenu akcie  $S$  v čase  $t$ :  $S_t = S_0 \exp\left\{\delta w + \left(\mu - \frac{1}{2}\delta^2\right)t\right\}$ .



Obrázok 8: geometrický Brownov pohyb so záporným driftom tj.  $\mu < 0$ , pre kladný drift by sme sledovali opačný sklon

Pre strednú hodnotu ceny akcie v čase  $t$  máme teda na základe vyjadrenia  $S_t$ :

$$ES_t = S_0 \exp\{\mu t\} \text{ pre všetky } t.$$

Pre  $\mu > 0$  ide  $ES_t \rightarrow \infty$ , ak  $\mu = 0$  je  $ES_t = \text{konšt.}$  a ak  $\mu < 0$  potom  $ES_t \rightarrow 0$ .

Vraťme sa späť k vyjadreniu ceny akcie  $S$  v čase  $t$ . Tu platí na základe Zákona veľkých čísiel, že ak  $\mu > 0$  ale  $\mu - \frac{1}{2}\delta^2 < 0$  potom  $S_t \xrightarrow{s.j.} 0$  ale  $ES_t \rightarrow \infty$ . A takisto aj keď

$$\mu - \frac{1}{2}\delta^2 > 0 \text{ potom } S_t \xrightarrow{s.j.} \infty \text{ a stále } ES_t \rightarrow \infty.$$

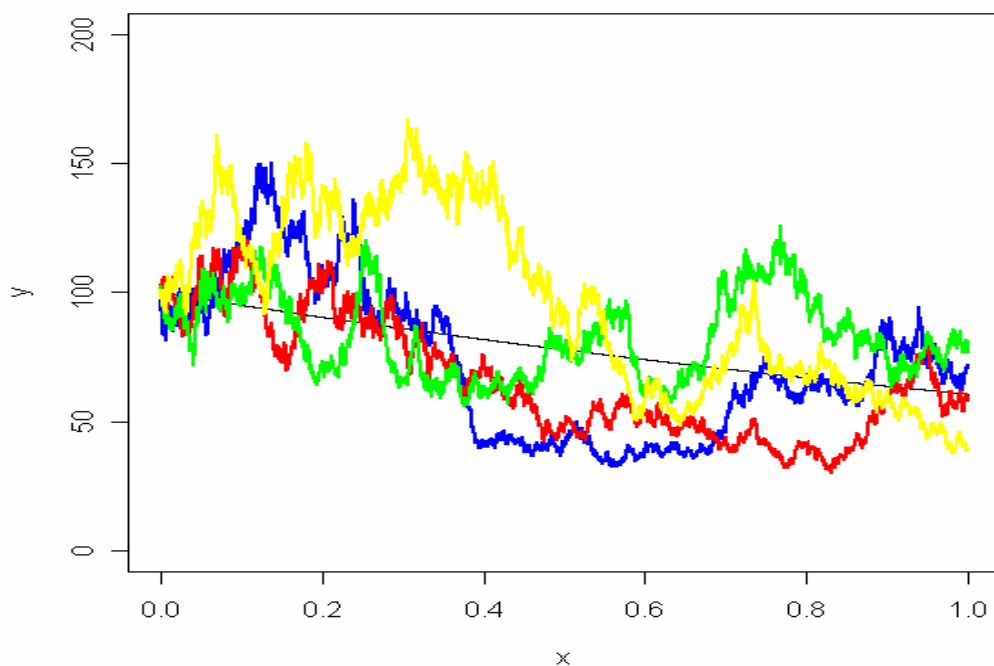
Ďalej platí:  $E \exp\left\{\delta w - \frac{1}{2}\delta^2 t\right\} = 1$  pre všetky  $t$ .

Nás zaujíma či cena akcie v niakom určenom čase  $t$  prekročí exponenciálu v tvare  $S_0 \exp\left\{\mu - \frac{1}{2}\delta^2 t\right\}$  (pre grafickú reprezentáciu si ju označme  $B$ ). Teda či:

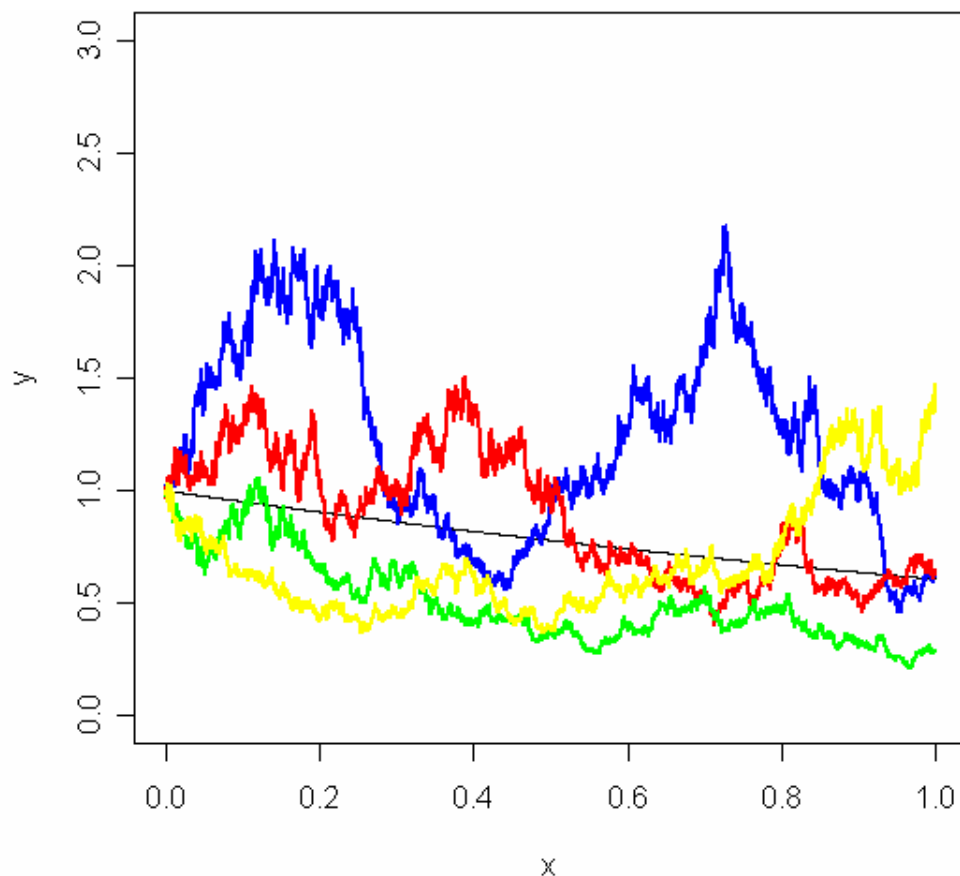
$S_t > S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\delta^2\right)t\right\}$ . A práve týmto problémom sa budeme bližšie zaoberať v nasledujúcej podkapitole.

### 3.3 Použitie Zákona arku sínu na cenu akcie

Prípád kedy Wienerov proces  $W_u > 0$  pre  $\forall u \in (s, t)$  má pravdepodobnosť danú Zákonom arku sínu, z toho vyplýva pre cenu akcie, že:  $S_u > \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\delta^2\right)u\right\}$ . Takisto prípad keď  $W_u < 0$  pre  $\forall u \in (s, t)$  je daný s rovnakou pravdepodobnosťou danou Zákonom ark sínu. Na základe Lévyho Zákona arku sínu si označme čas respektívne jeho podiel z intervalu  $[0, T]$ , po ktorý je cena akcie  $S_u > \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\delta^2\right)u\right\}$ . Overme si teraz na základe grafického zobrazenia  $ES_u$  a  $S_u$  platnosť týchto úvah.



Obrázok 9: Vývoj ceny akcií v závislosti na  $t$  s parametrami  $\mu=0$  a  $\sigma=1$  v porovnaní s hranicou, ktorú udáva exponenciála  $B$



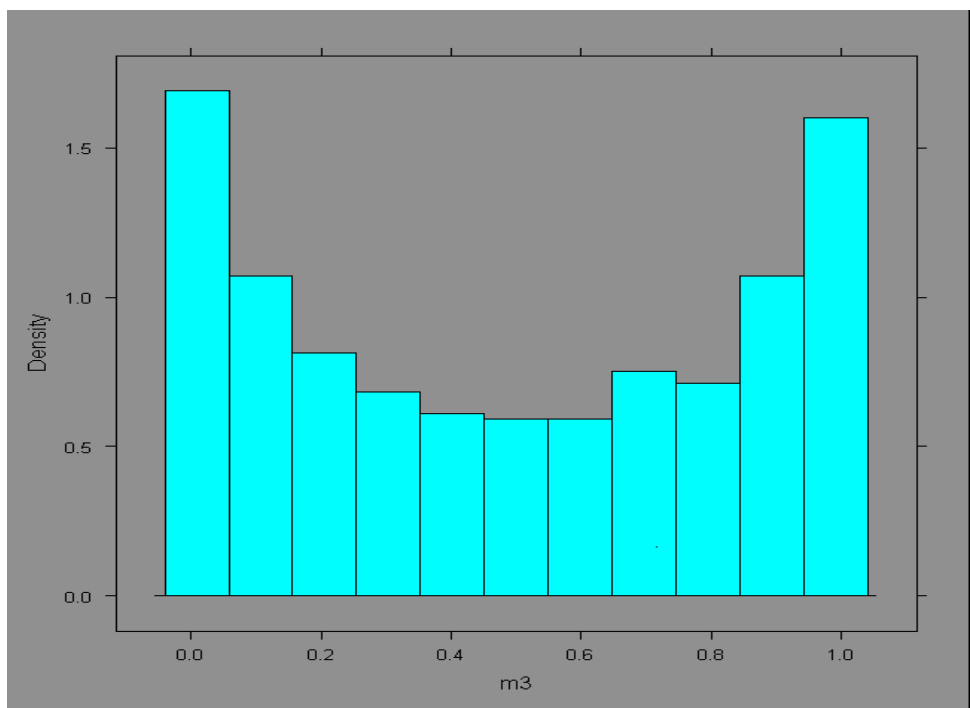
Obrázok 10: Vývoj ceny akcií v závislosti na  $t$  s parametrami  $\mu=0$  a  $\sigma=1$  v porovnaní s hranicou, ktorú udáva exponenciála  $B$  s jednotkovou počiatočnou cenou akcie

alfa	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$P(T_n < \text{alfa})$	0.0637	0.1435	0.2048	0.2952	0.369	0.4359	0.5
m3	0.067	0.147	0.214	0.31	0.39	0.445	0.506
m4	0.064	0.135	0.199	0.297	0.366	0.447	0.503
m5	0.068	0.165	0.23	0.302	0.362	0.428	0.499

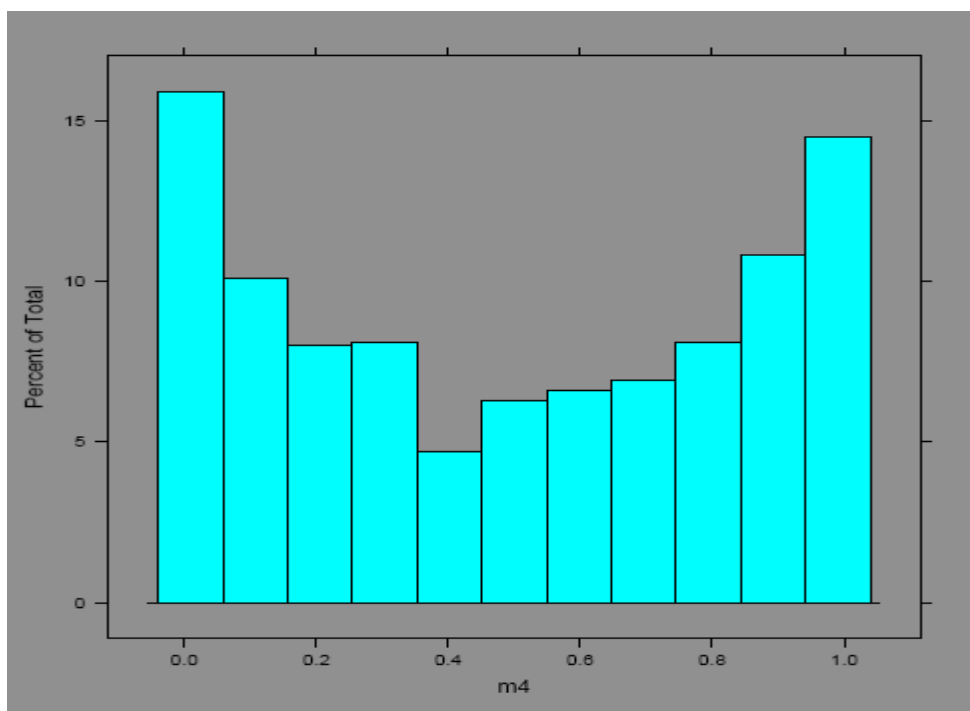
alfa	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99
$P(T_n < \text{alfa})$	0.5641	0.6309	0.7048	0.7952	0.9362
m3	0.568	0.633	0.705	0.793	0.938
m4	0.559	0.642	0.716	0.797	0.937
m5	0.567	0.641	0.718	0.815	0.939

Tabuľka č.1

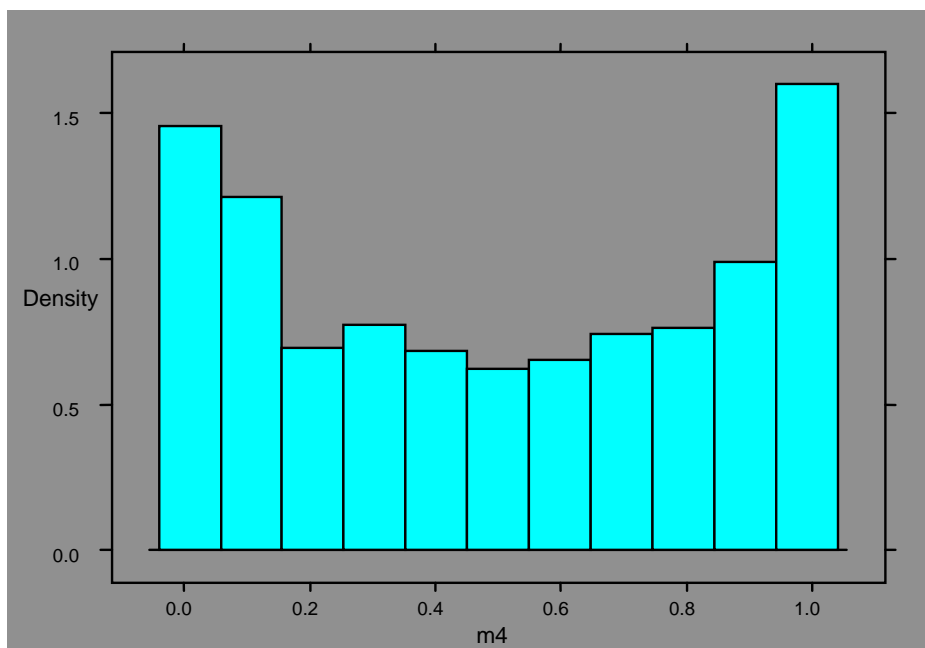
V tabuľke číslo 1 môžeme sledovať a porovnávať teoretické a namerané hodnoty pravdepodobností pre jednotlivé hodnoty  $\alpha$ . Jasne vidíme, že odchýlky v jednotlivých nameraných hodnotách pravdepodobností sú voči teoretickým hodnotám minimálne. Jednotlivé procesy teda skutočne spĺňajú Zákon arku sínu, o čom sa môžeme presvedčiť aj porovnaním grafu hustoty funkcie arku sínu a histogramov hustoty jednotlivých procesov. Vidíme, že grafy majú rovnaký tvar písmena u s plochým dnom vid'. obrázky 11, 12 a 13.



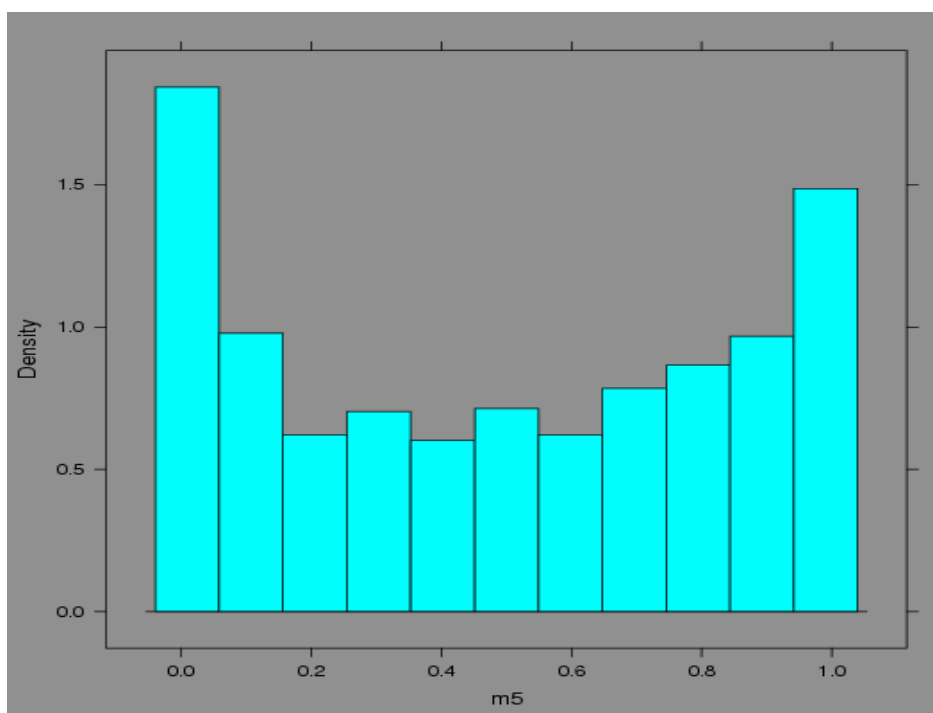
Obrázok 11: grafické zobrazenie hodnôt hustoty pre  $m_3$



Obrázok 12 : percentuálne zobrazenie hodnôt nameraných pre  $m_4$



Obrázok 13: grafické zobrazenie hustoty nameraných hodnôt pre  $m_4$



Obrázok 14

## Literatúra

- [1] Lesigne E. (2005): Heads or tails: *An Introduction to Limit Theorems in Probability*, American Mathematical Society , Providence
- [2] Nekula K.(2004): Diplomová práce: *Finanční opce*
- [3] Prášková Z., Lachout P.(1998): *Základy náhodných procesů* , Karolinum ,Praha
- [4] Steele J. Michael (2000): Applications of mathematics: *Stochastic Calculus And Financial Applications*, Springer-Verlag New York
- [5] Stirzaker D. (2003): Elementary probability, Second edition, Cambridge university press, Cambridge
- [6] Ševčovič D.(2001): Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, Bratislava